



FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
DEPARTMAN ZA GRAĐEVINARSTVO I GEODEZIJU
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA



INŽENJERSKA GEODEZIJA

Računanje površina i zapremina

Doc. dr Mehmed Batilović, mast. inž. geodez.

Novi Sad, 2023/2024

1

Računanje površina i zapremina

- Računanje površina i zapremina predstavlja polaznu osnovu u inženjerskim radovima kao što su izgradnja puteva, pruga, kanala i slično, gde su prisutni veliki zemljani radovi.
- Greške u određivanju površina i zapremina mogu da prouzrokuju ogromne materijalne gubitke.
- Danas se računanje površina i zapremina sprovodi u okviru specijalizovanih softverskih rešenja.
- U cilju pripreme ulaznih podataka i interpretacije dobijenih rezultata neophodno je poznavati principe na kojima se zasnivaju postupci određivanja površina i zapremina implementirani u okviru softverskih rešenja.

2

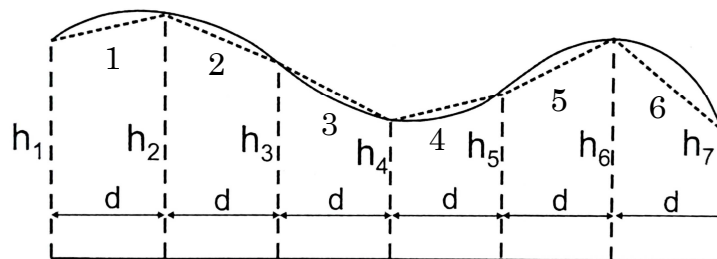
Računanje površina

- Površina figure može se izračunati na osnovu:
 - mera iz grafičkog sadržaja projekta;
 - direktnih terenskih merenja.
- Tačnost određivanja površine uslovljena je tačnošću podataka koji se koriste prilikom računanja površine.
 - Ukoliko se podaci preuzimaju iz projektne dokumentacije u analognom obliku, tj. topografskih planova, skica, crteža i sl., tačnost sračunate površine zavisi od razmere tih crteža.
 - Ukoliko se podaci preuzimaju iz projektne dokumentacije u digitalnom obliku, tačnost sračunate površine je funkciji tačnosti terenskih merenja na osnovu kojih je izrađena digitalna geodetska podloga.

3

Računanje površina pomoću figura jednostavnih geometrijskih oblika

- Svaki poligon se može podeliti na niz poligona pravilnih geometrijskih figura, čije površine se mogu izračunati na osnovu poznatih formula.
- Prilikom aproksimacije poligona koriste se trouglovi, trapezi, romboidi, krugovi, elipse, kružni iseći i slično.



4

Trapezoidno pravilo

➤ Površina prvog trapeza određuje se kao:

$$P_1 = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot d, \quad P_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \cdot d.$$

➤ Ukupna površina jednaka je sumi površina svih trapeza:

$$P = \left(\frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{h_2 + h_3}{2} + \frac{h_3 + h_4}{2} + \frac{h_4 + h_5}{2} + \frac{h_5 + h_6}{2} + \frac{h_6 + h_7}{2} \right) \cdot d,$$

$$P = \left(\frac{h_1 + h_7}{2} + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 \right) \cdot d,$$

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \left(\frac{h_1 + h_{n+1}}{2} + \sum_{i=2}^n h_i \right) \cdot d.$$

5

Simpsonovo pravilo

➤ Ukupna površina se dobija kao trećina proizvoda rastojanja između ordinata d i kumulativne sume prve i poslednje ordinate, dvostruke sume neparnih ordinata i četverostruke sume parnih ordinata:

$$P = \frac{d}{3} \cdot ((h_1 + h_7) + 4 \cdot (h_2 + h_4 + h_6) + 2 \cdot (h_3 + h_5)),$$

$$P = \frac{d}{3} \cdot \left((h_1 + h_n) + 4 \cdot \sum_{i=2,4,\dots,n-1} h_i + 2 \cdot \sum_{i=3,5,\dots,n-2} h_i \right).$$

➤ Formula daje analitički tačnu vrednost samo ukoliko su krive linije od ordinate do ordinate u obliku parabole.

➤ Neophodno je definisati neparan broj ordinata.

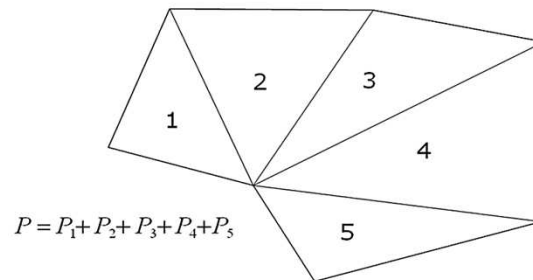
6

Računanje površina pomoću figura jednostavnih geometrijskih oblika

➤ Površina trougla može se odrediti primenom Heronovog obrasca:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2},$$

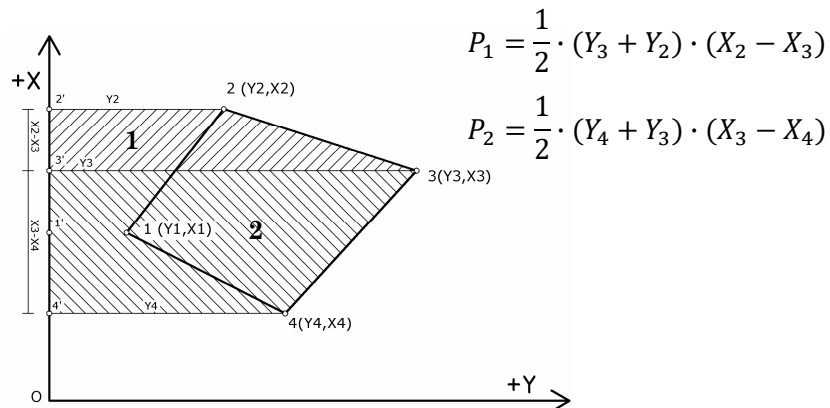
gde su a , b , i c stranice trougla.



7

Računanje površina iz koordinata graničnih tačaka

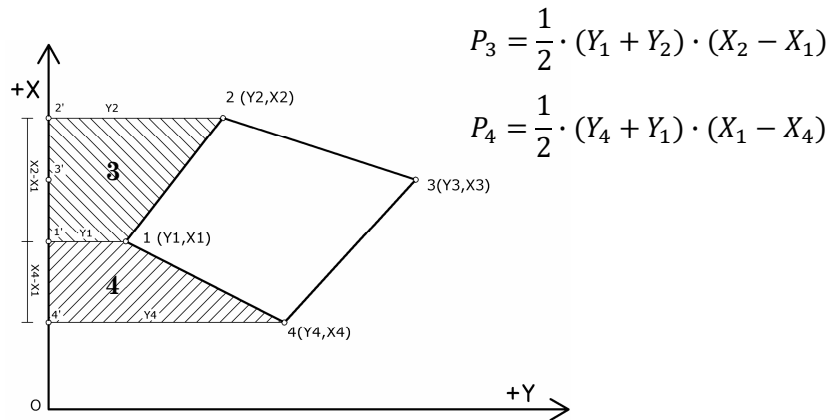
➤ Postupak određivanja površina iz koordinata prikazan je na primeru poligona od četiri granične tačke.



8

Računanje površina iz koordinata graničnih tačaka

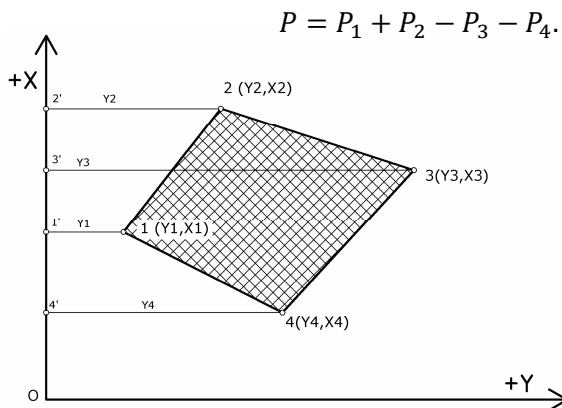
➤ Šrafirane površine sa slike određuju se na osnovu formula za računanje površine trapeza.



9

Računanje površina iz koordinata graničnih tačaka

➤ Tražena površina poligona prikazana na slici određuje se na sledeći način:



10

Računanje površina iz koordinata graničnih tačaka

- Uvrštavanjem izraza za P_1, P_2, P_3 i P_4 u prethodni izraz dobija se:

$$2P = (Y_3 + Y_2) \cdot (X_2 - X_3) + (Y_4 + Y_1) \cdot (X_1 - X_4) \\ - (Y_1 + Y_2) \cdot (X_2 - X_1) - (Y_4 + Y_1) \cdot (X_1 - X_4),$$

odnosno

$$2P = Y_1 \cdot (X_4 - X_2) + Y_2 \cdot (X_1 - X_3) + Y_3 \cdot (X_2 - X_4) + Y_4 \cdot (X_3 - X_1).$$

- U opštem slučaju:

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Y_i \cdot (X_{i-1} - X_{i+1}),$$

pri čemu je n broj graničnih tačaka poligona.

11

Računanje površina iz koordinata graničnih tačaka

- Na identičan način izvodi se i formula za računanje površine na osnovu projekcije na Y osu:

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i \cdot (Y_{i-1} - Y_{i+1}),$$

pri čemu je n broj graničnih tačaka poligona.

- Granične tačke moraju biti indeksirane od 1 do n u rastućem nizu u pravcu kretanja kazaljke na satu.
- Alati za računanje površina u CAD softverskim rešenjima bazirani su na ovim formulama.

12

Proračun tačnosti određivanja površina

- Prilikom projektovanja i izgradnje inženjerskih objekata, neretko se prave greške u određivanju površina, koje mogu da prouzrokuju velike materijalne gubitke.
- Postupak određivanja površina obuhvata sledeće radove:
 - proračun tačnosti određivanja površine – na osnovu dobijenih rezultata vrši se odabir mernih uređaja i metoda merenja elementarnih veličina;
 - merenje elementarnih veličina;
 - računanje površine iz elementarnih veličina;
 - ocena tačnosti sračunate površine;
 - prikaz rezultata i dokaza o ostvarenoj tačnosti.

13

Proračun tačnosti određivanja površina

- Opšti slučaj računanja površine neke figure:

$$P = f(a, b),$$

gde su a i b veličine pomoću kojih se računa površina.

- Ukoliko se ova funkcija linearizuje i zadrže samo linearni članovi, standardno odstupanje površine jednako je:

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial b}\right)^2 \cdot \sigma_b^2,$$

gde su σ_a i σ_b standardna odstupanja veličina a i b ,

a $\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)$ i $\left(\frac{\partial P}{\partial b}\right)$ parcijalni izvodi površine po a i b .

14

Proračun tačnosti određivanja površina

➤ PRIMER

Oceniti tačnost određivanja površine pravougaonika čije su stranice $a = 100 \text{ m}$ i $b = 10 \text{ m}$ merene sa tačnošću $\sigma_a = \sigma_b = 1 \text{ cm}$.

$$P = a \cdot b, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) = f_a = b, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial b}\right) = f_b = a,$$

$$\sigma_P^2 = f_a^2 \cdot \sigma_a^2 + f_b^2 \cdot \sigma_b^2 = (10 \text{ m})^2 \cdot (0.01 \text{ m})^2 + (100 \text{ m})^2 \cdot (0.01 \text{ m})^2,$$

$$\sigma_P^2 = 1.01 \text{ m}^4 \Rightarrow \sigma_P = 1.00 \text{ m}^2.$$

Kojom tačnošću treba meriti stranice a i b da bi greška određivanja površine bila 0.5 m^2 ?

$$\sigma_P^2 = (\sigma_P^2)_a + (\sigma_P^2)_b \Rightarrow (\sigma_P^2)_a = (\sigma_P^2)_b = \sigma_P^2 / 2 \Rightarrow \sigma_a^2 = \sigma_P^2 / (2 \cdot f_a^2) \dots$$

15

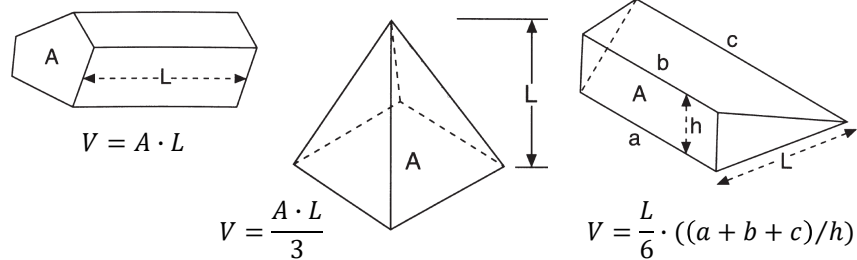
Računanje zapremina

- Projektovanje, izgradnja i uređenje prostora u neposrednoj okolini inženjerskog objekta vezani su za visinsko planiranje zemljišta, što sa stanovišta geometrije predstavlja promenu prirodnog reljefa u veštački reljef.
- Zemljani radovi – radovi na planiranju i nivelaciji zemljišta.
- Obim i koštanje zemljanih radova sagledava se iz količine iskopanog, prevezenog i nasutog zemljanog materijala.
- Količine materijala pri projektovanju ili prilikom izgradnje računaju se na različite načine, što zavisi od oblika iskopane ili nasute zemljane mase koja je smeštena između projektovane ravni nivelacije i prirodnog reljefa zemljišta.

16

Računanje zapremine primenom prizmoidalne jednačine

- Svako geometrijsko telo može se podeliti na pravilna geometrijska tela, čije zapremine se mogu sračunati pomoću poznatih formula.
- Prilikom aproksimacije složenih geometrijskih tela obično se koriste prizme, piramide i klinovi.



17

Računanje zapremine primenom prizmoidalne jednačine

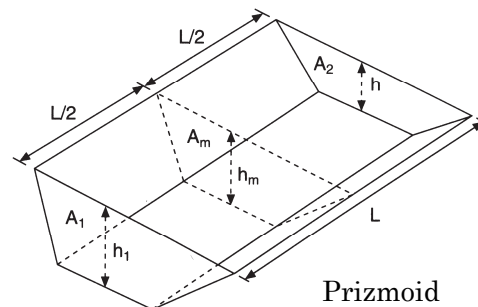
- Navedene formule za računanje zapremine prizme, klina i piramide mogu se predstaviti zajedničkom formulom:

$$V = \frac{L}{6} \cdot (A_1 + 4 \cdot A_m + A_2),$$

gde su:

A_1 i A_2 granične površi,

A_m površina preseka na sredini rastojanja između graničnih površi.



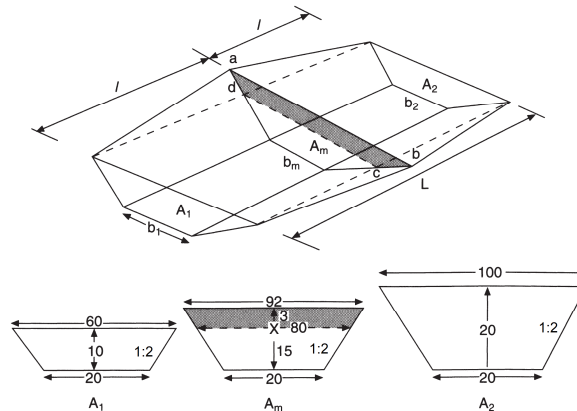
18

Računanje zapremina pomoću poprečnih profila

➤ Kod ovog pristupa zapremina se određuje na sledeći način:

$$V = \frac{A_1 + A_2}{2} \cdot L.$$

➤ Tačna vrednost zapremine prizmoida dobija se samo kada je površina srednjeg preseka jednaka aritmetičkoj sredini površina krajnjih preseka.



19

Računanje zapremina pomoću poprečnih profila

- Prethodno navedeni izraz daje precenjene rezultate, ali ima široku primenu u praksi zbog svoje jednostavnosti.
- Računanje zapremina na osnovu poprečnih profila primenjuje se u slučaju kada je visina ili širina susednih profila približno jednaka (prizmoid se sastoji od klinova i prizmi).
- Prizmoidalni ekces – razlika između računanja zapremina na osnovu krajnjih profila i prizmoidalnog računanja.
- Trapezoidno pravilo računanja zapremina:

$$V = \left(\frac{A_1 + A_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} A_i \right) \cdot L.$$

20

Računanje zapremina pomoću izohipsi

- Zapremine se mogu sračunati na osnovu izohipsi primenom prethodno prikazanih metoda uz određene modifikacije.
- Zapremina se određuje na sledeći način:

$$V = A_n \cdot \frac{\Delta h}{3} + h \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{A_i + A_{i+1}}{2} \right),$$

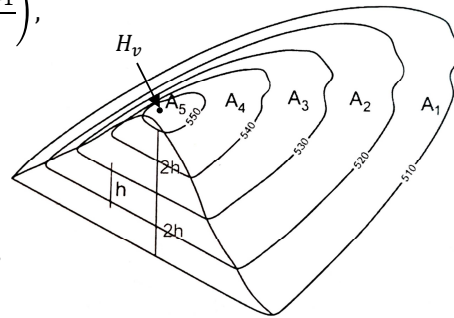
$$\Delta h = H_v - H_n,$$

h – ekvidistanca,

A_i – površina obuhvaćena i - tom izohipsom,

H_n – kota poslednje izohipse,

H_v – kota najvišocije tačke.



21

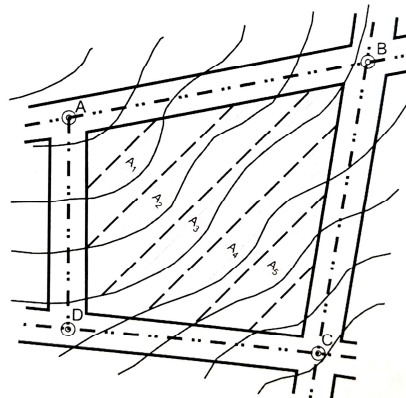
Računanje zapremina pomoću izohipsi

- Ova metoda se koristi kod proračuna zemljanih radova kod nivelacije zemljišta, izgradnje trgova, parkirališta ili sportskih terena.
- Zapremina useka ili nasipa između dve susedne izohipse određuje se na sledeći način:

$$V = \left(\frac{A_i + A_{i+1}}{2} \right) \cdot h,$$

A_i, A_{i+1} – površine useka ili nasipa između izohipsi,

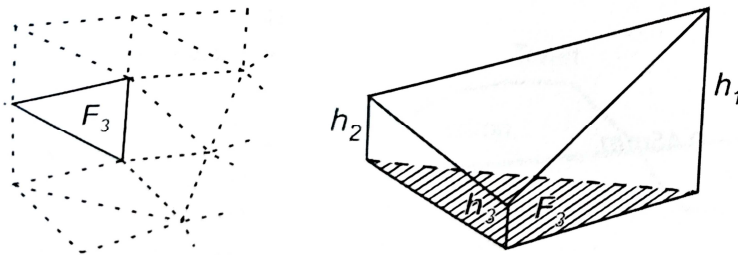
h – ekvidistanca.



22

Računanje zapremina pomoću mreže pravilnih geometrijskih figura

- Kod ovog pristupa projektovana ravan se usvaja za bazu tela čija se zapremina određuje.
- Projektovana ravan se izdela na mrežu kvadrata, pravougaonika ili trouglova čije se visine temena h_i određuju direktno na terenu.



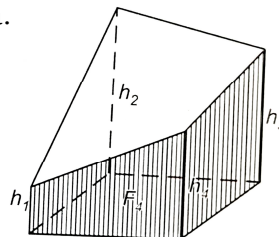
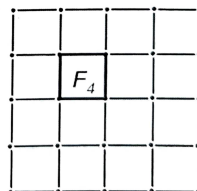
23

Računanje zapremina pomoću mreže pravilnih geometrijskih figura

- Ukupna zapremina dobija se sabiranjem zapremina pojedinačnih prizmi:

$$V = \sum_{j=1}^n V_j, \quad V_j = A_j \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k h_i, \quad k = 3 \text{ ili } 4,$$

gde je n broj prizmi, A_j površina osnove j -te prizme, h_i visine temena, a k broj temena.



24

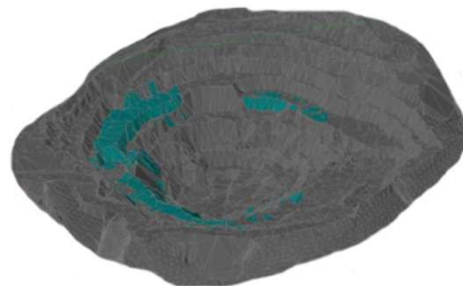
Određivanja zapremina na osnovu digitalnih modela terena

- Konvencionalne metode određivanja zapremina bazirane su na primeni približnih formula, jer je primena tačnih formula u prošlosti bila komplikovana.
- Danas, u eri personalnih računara nema potrebe da se koriste približne formule, već je potrebno koristiti tačne formule za računanje zapremina.
- Ekspanzija informacionih tehnologija dovela je do razvoja velikog broja programskih paketa za 3D projektovanje, modeliranje i integraciju prostornih baza podataka, kao što su *AutoCAD Civil 3D*, *ArcGIS*, *MicroSurvey CAD* i sl.
- U okviru ovih programskih paketa zapremine se mogu odrediti na jednostavan način pomoću digitalnih modela.

25

Određivanja zapremina na osnovu digitalnih modela terena

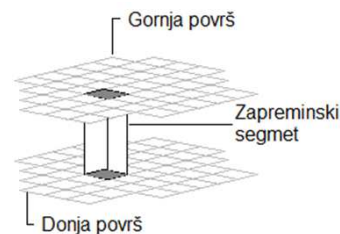
- Za potrebe određivanja zapremina neophodna su dva digitalna modela terena (prvo i drugo stanje).
- Digitalni modeli terena moraju biti poziciono jedan iznad drugog, pri čemu se jedan usvaja kao baza (osnova) a drugi kao novo stanje (otkopano ili nasuto).



26

Određivanja zapremina na osnovu digitalnih modela terena

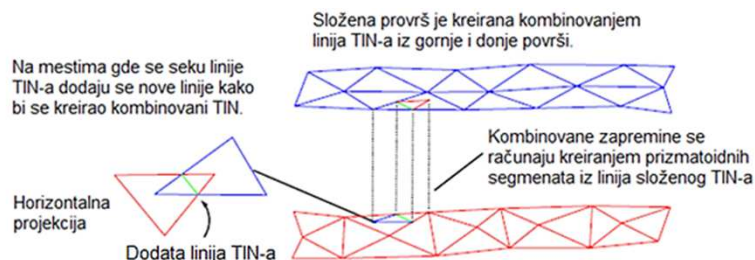
- U postupku određivanja zapremina na osnovu digitalnih modela terena primenjuje se:
 - grid metoda;
 - kombinovana metoda;
- Grid metoda zasniva se na računanju zapremina pojedinačnih prizmi sa osnovom kvadrata ili pravougaonika.
- U čvornim tačkama se interpoluju visine na dve definisane površi i odrede visinske razlike koje se koriste kao visine prizmi u pojedinim čvorovima.



27

Određivanja zapremina na osnovu digitalnih modela terena

- Kombinovana metoda bazirana je na formiranju nove mreže nepravilnih trouglova (TIN) koja se dobije u preseku dve postojeće mreže trouglova koje se odnose na prvi i drugi model.
- Visine tačaka se interpoluju na jednoj i drugoj površi u vrhovima novih trouglova.
- Određivanje zapremine svodi se na računanje zapremina pojedinačnih prizmi sa osnovom trougla.



28

Proračun tačnosti određivanja zapremina

- Prilikom projektovanja i izgradnje inženjerskih objekata, neretko se prave greške u određivanju zapremina, koje mogu da prouzrokuju velike materijalne gubitke.
- Postupak određivanja zapremina obuhvata sledeće radove:
 - proračun tačnosti određivanja zapremine – na osnovu dobijenih rezultata vrši se odabir mernih uređaja i metoda merenja elementarnih veličina;
 - merenje elementarnih veličina;
 - računanje zapremine iz elementarnih veličina;
 - ocena tačnosti sračunate zapremine;
 - prikaz rezultata i dokaza o ostvarenoj tačnosti.

29

Proračun tačnosti određivanja zapremina

- Opšti slučaj računanja zapremine nekog tela:

$$V = f(a, b, c),$$

gde su a , b i c veličine pomoću kojih se računa zapremina.

- Ukoliko se ova funkcija linearizuje i zadrže samo linearni članovi, standardno odstupanje zapremine jednako je:

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2 \cdot \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)^2 \cdot \sigma_c^2,$$

gde su σ_a , σ_b i σ_c standardna odstupanja veličina a , b i c ,

a $\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)$, $\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)$ i $\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)$ parcijalni izvodi zapremine po a , b i c .

30

Proračun tačnosti određivanja zapremine

➤ PRIMER

Oceniti tačnost određivanja zapremine prizme čije su stranice $a = 100 \text{ m}$, $b = 100 \text{ m}$ i $c = 10 \text{ m}$ merene sa tačnošću $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = 1 \text{ cm}$.

$$V = a \cdot b \cdot c, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = f_a = b \cdot c, \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) = f_b = a \cdot c, \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = f_c = a \cdot b,$$

$$\sigma_V^2 = f_a^2 \cdot \sigma_a^2 + f_b^2 \cdot \sigma_b^2 + f_c^2 \cdot \sigma_c^2, \quad \sigma_V^2 = (100 \text{ m} \cdot 10 \text{ m})^2 \cdot (0.01 \text{ m})^2 \dots$$

Kojom tačnošću treba meriti stranice a , b i c da bi greška određivanja zapremine bila 5 m^3 ?

$$\sigma_V^2 = (\sigma_V^2)_a + (\sigma_V^2)_b + (\sigma_V^2)_c \Rightarrow (\sigma_V^2)_a = (\sigma_V^2)_b = (\sigma_V^2)_c = \sigma_V^2 / 3$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_V^2 / (3 \cdot f_a^2), \quad \sigma_b^2 = \sigma_V^2 / (3 \cdot f_b^2), \quad \sigma_c^2 = \sigma_V^2 / (3 \cdot f_c^2)$$

31

PITANJA?

32