



FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
DEPARTMAN ZA GRAĐEVINARSTVO I GEODEZIJU
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA



OSNOVE GEONAUKA

Gravitaciono polje Zemlje

Doc. dr Mehmed Batilović, mast. inž. geodez.

Novi Sad, 2023/2024

1

Gravitaciona sila

- Isaac Newton (1687) formulisao je univerzalni zakon gravitacije, po kojem telo mase m privlači drugo telo mase M silom \vec{F} čiji je intenzitet proporcionalan proizvodu te dve mase, a obrnuto proporcionalan kvadratu rastojanja između njih Δr^2 :

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{\Delta r^2},$$

gde je G gravitaciona konstanta koja iznosi $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

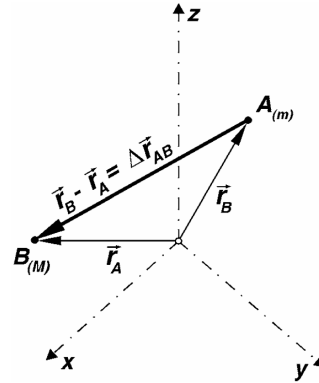
- Smatra se da se gravitaciono privlačenje prostire duž prave linije beskonačno velikom brzinom, pa u skladu sa tim gravitacija ima trenutni efekat na bilo kojoj dužini koju razmatramo.

2

Gravitaciona sila

- Za dva fizička tela A i B sa masama m_A i m_B i dimenzijama koje se mogu smatrati zanemarljivo malim u odnosu na rastojanje između njih, važi sledeća jednačina gravitacione sile kojom B deluje na A :

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = G \frac{m_B \cdot m_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|^3} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A).$$



3

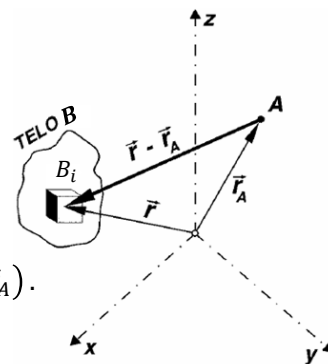
Gravitaciona sila

- Ukoliko dimenzije tela B nisu zanemarljive, smatra se da je telo B sastavljeno od brojnih malih elemenata mase $m_{B,i}$.
- U ovom slučaju, istražuje se privlačenje svakog elementa B_i i tela A :

$$\vec{F}_{B_i \rightarrow A} = G \frac{m_{B,i} \cdot m_A}{|\vec{r}_{B,i} - \vec{r}_A|^3} \cdot (\vec{r}_{B,i} - \vec{r}_A).$$

- Budući da je gravitaciona sila aditivna, može se napisati:

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = G \cdot m_A \cdot \sum_{i=1}^n \frac{m_{B,i}}{|\vec{r}_{B,i} - \vec{r}_A|^3} \cdot (\vec{r}_{B,i} - \vec{r}_A).$$



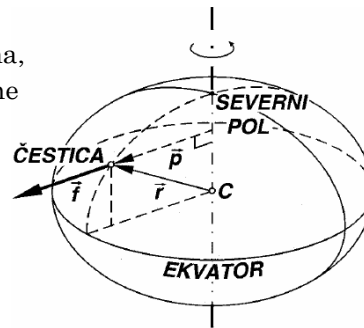
4

Centrifugalna sila

- Usled rotacije Zemlje oko svoje ose dolazi do pojave dodatne sile, centrifugalne sile, koja deluje na sve objekte koji se okreću zajedno sa Zemljom oko njene ose.
- Priroda centrifugalne sile je prividna, jer onog momenta kada telo prestane da se okreće zajedno sa Zemljom nestaje i centrifugalna sila.
- Centrifugalna sile koja deluje na neku česticu je:

$$\vec{f}_A = \vec{p}_A \cdot \omega^2 \cdot m_A,$$

gde je \vec{p}_A normalno rastojanje čestice od Zemljine obrtne ose, ω je Zemljina ugaona brzina, a m_A masa čestice na koju sila deluje.



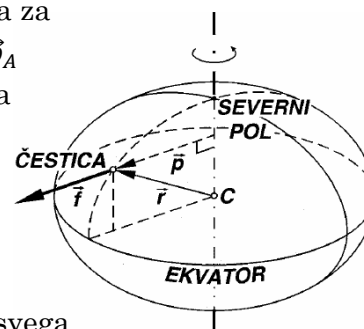
5

Centrifugalna sila

- Ukoliko se za ugaonu brzinu ω uzme vrednost $72.92115 \cdot 10^{-6}$ rad /s, a za vrednost normalnog rastojanja \vec{p}_A vrednost 6378.137 km, tada se za vrednost centrifugalne sile na Ekvatoru dobija:

$$f_A = 3.392 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \right] \cdot m_A.$$

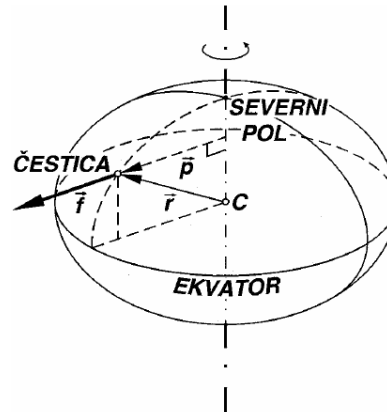
- Navedena vrednost predstavlja svega 0.35% od gravitacione sile.



6

Centrifugalna sila

- Centrifugalna sila se menja sa vremenom, kako po pravcu tako i po intenzitetu.
- Promene intenziteta brzine rotacije Zemlje menjaju intenzitet centrifugalne sile.
- Pravac centrifugalne sile menjaju promene pravca obrtne ose Zemlje.
- Centrifugalna sila na polovima jednaka je nuli.



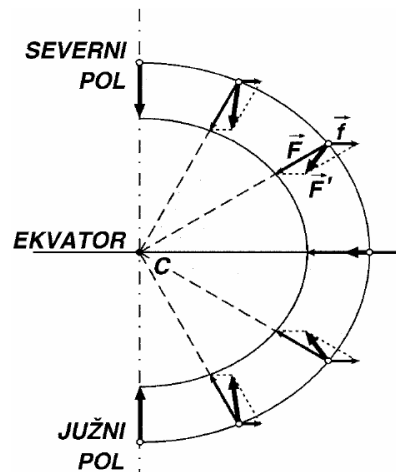
7

Sila Zemljine teže

- Sila Zemljine teže je zbir gravitacione i centrifugalne sile:

$$\vec{F}' = \vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{f}_A.$$

- Polje sile Zemljine teže šematski je prikazano strelicama na slici desno.
- Evidentno je da je sila Zemljine teže jača na polovima nego na ekvatoru.



8

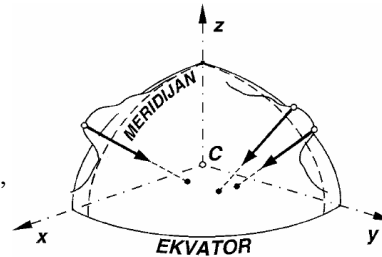
Sila Zemljine teže

- Prema drugom Njutnovom zakonu kretanja, koji kaže da je sila proporcionalna proizvodu mase i ubrzanja, sila teže može se napisati kao:

$$\vec{F}' = \vec{g} \cdot m,$$

gde je \vec{g} vektor ubrzanja sile teže.

- Budući da se masa čestice m može smatrati razmerom polja sile teže \vec{F}' , polje ubrzanja teže \vec{g} u potpunosti opisuje polje sile teže.
- Polje sile teže je vektorsko, dakle ima svoj intenzitet i pravac, a intenzitetom je jednostavnije manipulirati jer je skalar.
- Jedinica za ubrzanje je gal (cm/s^2), nazvana po Galileu Galileju.



9

Ubrzanje sile Zemljine teže

- Intenzitet ubrzanja sile Zemljine teže može se meriti pomoću različitih tipova gravimetrijskih uređaja.
- Bitno je istaći da intenzitet ubrzanja teže g varira kako na globalnom i regionalnom, tako i lokalnom nivou.
- Varijacije intenziteta sile teže imaju tri izvora:
- različite visine tačaka na kojima se vrše merenja;
 - spljoštenost Zemlje;
 - nepravilna raspodela masa unutar Zemljinog tela.
- Važno je istaći da su sve ove nepravilnosti, iako su značajne i lako se opažaju, minimalne u poređenju sa samom težom.

10

Ubrzanje sile Zemljine teže

- U tom smislu, prvo se analitičkim izrazima modelira što širi dijapazon intenziteta teže (referenta teža), a zatim se dobijene vrednosti oduzimaju od stvarno opažanih vrednosti.
- Dobijene razlike predstavljaju meru varijacije intenziteta Zemljine teže.
- Ukoliko pretpostavimo da se Zemlja ne rotira oko svoje ose i tretiramo je kao homogenu sferu mase M , može se napisati:

$$g \cdot m = G \cdot \frac{m \cdot M}{\Delta r^2} \Rightarrow g = \frac{G \cdot M}{\Delta r^2},$$

gde je m masa objekta na koji deluje gravitaciona sila, a Δr rastojanje od centra mase Zemlje.

- Prethodni izraz se može uzeti za referentno polje teže.

11

Internacionalna gravitaciona formula za Zemlju

- Ukoliko Zemlju aproksimiramo rotacionim elipsoidom sa uniformno raspoređenim masama u njegovoj unutrašnjosti, koji rotira oko svoje kraće ose brzinom kojom rotira i Zemlja oko svoje ose, ubrzanje sile teže g u nekoj tački na površi takvog tela može se odrediti na sledeći način:

$$g = g_e \cdot \left[1 + \left(\frac{5}{2}m - \frac{17}{4}mf \right) \sin^2 \phi + \left(f \frac{f - 5m}{8} \right) \sin^2 2\phi \right],$$

gde je ϕ geocentrična širina, g_e vertikalna komponenta gravitacione sile na ekvatoru, $m = 0,00346775$ konstanta koja je približno jednaka količniku vrednosti centrifugalne sile i gravitacionog ubrzanja na ekvatoru, dok konstanta $f = 0,0033528$ predstavlja spljoštenost geoida.

12

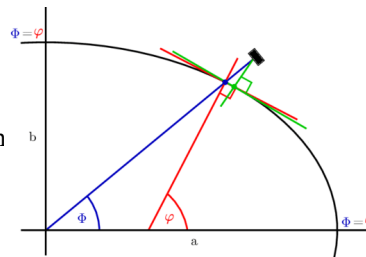
Normalno polje teže

- Internacionalna gravitaciona formula za Zemlju može se napisati u prostijem obliku, vezanom za elipsoid WGS84 kao:

$$g_o = 9,780327 \cdot [1 + 0,00503024 \cdot \sin(2\phi) - 0,0000058 \cdot \sin^2(2\phi)] \frac{m}{s^2}.$$

- Ovako definisano referentno polje teže naziva se normalno polje teže.

- Normalno polje teže ima veliki značaj, jer su odstupanja između stvarnog polja Zemljine teže i vrednosti definisanih prikazanom formulom vrlo mala u poređenju sa ukupnom silom teže.



13

Normalno polje teže

- Prethodno prikazana formula za normalno polje teže izražava ubrzanje sile Zemljine teže na površi rotacionog homogenog elipsoida čija je masa jednaka masi Zemlji.

- Na osnovu internacionalne gravitacione formule za Zemlju dobijaju se sledeće vrednosti ubrzanja:

$$g_E = 9.780327 \frac{m}{s^2}, \text{ za Ekvator } (\phi = 0^\circ);$$

$$g_P = 9.829468 \frac{m}{s^2}, \text{ za polove } (\phi = 90^\circ).$$

- Ukupna promena ubrzanja sile teže od Ekvatora do polova je veoma mala, iznosi svega $0.050 \frac{m}{s^2}$.

- Razlike između stvarne sile teže na površini Zemlje i normalne sile teže nazivaju se anomalija sile teže.

14

Gravimetrija

- Merenje ubrzanja sile teže izvodi se primenom:
 - dinamičkih metoda – obuhvataju grupu instrumenata za merenje ubrzanja opažanjem periode oscilovanja klatna ili vremena slobodnog pada tela;
 - statičkih metoda – bazirane na korišćenju principa gravitaciono vrlo osetljivog, balansiranog tega fiksiranog na zategnutoj opruzi i poluzi.
- Dinamičkim metoda se obično određuju apsolutne vrednosti ubrzanja sile teže, dok se relativna ubrzanja teže između dve tačke određuju veoma retko.
- Statičkim metodama se mogu odrediti samo relativne vrednosti ubrzanja teže, odnosno razlike ubrzanja teže između dve tačke.

15

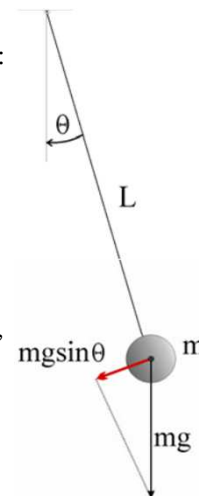
Gravimetrija

- Period oscilovanja jednog fizičkog klatna i ubrzanje teže povezani su matematičkim izrazom:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad g = \frac{4\pi^2 L}{T^2},$$

gde je T perioda oscilovanja, L rastojanje između tačke oslonca i centra mase klatna, a g ubrzanje sile Zemljine teže koje deluje na masu klatna.

- Preciznim merenjem perioda oscilovanja klatna T , uz njegovu poznatu dužinu L , može se odrediti ubrzanje sile Zemljine teže g .
- Ova metoda je napuštena zbog raznih negativnih fizičkih uticaja na tačnost merenja perioda T .



16

Gravimetrija

- Savremene dinamičke metode bazirane su na slobodnom padu predmeta, pa se često nazivaju i balističkim metodama.
- Ove metode bazirane su na jednačini koja definiše pređeni put s tela pri slobodnom padu, u vremenu t , pod dejstvom ubrzanja sile teže g :

$$s = \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

- Na osnovu prethodnog izraza ubrzanje sile teže može se odrediti na sledeći način:

$$g = \frac{2s}{t^2}.$$

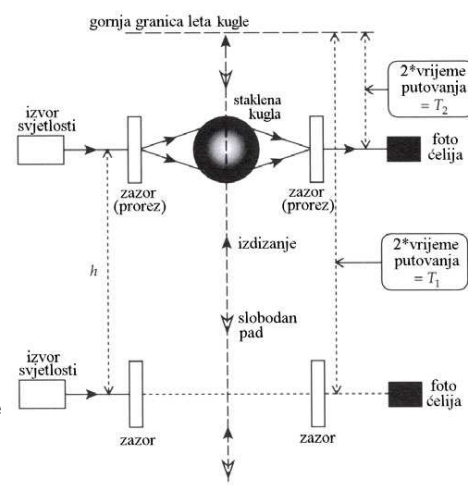
17

Gravimetrija

- Nakon izbacivanja staklene kugle sa donjeg nivoa prema gornjoj granici leta kugle, kugla će započeti slobodan pad u vakumskom prostoru.
- Ubrzanje sile teže određuje se na sledeći način:

$$g = \frac{8 \cdot h}{t_1^2 - t_2^2},$$

gde je h vertikalno rastojanje između fotoćelija, a t_1 i t_2 vremena prolaska kugle ispred donje i gornje fotoćelije.

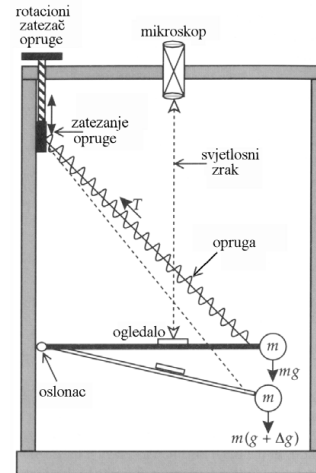


Princip rada gravimetra baziranog na slobodnom padu staklene kugle

18

Gravimetrija

- Statičke metode merenja ubrzanja teže u većini slučajeva su zasnovane na korišćenju principa gravitaciono vrlo osetljivog, balansiranog tega fiksiranog na zategnutoj opruzi i poluzi, tako je sistem doveden blizu astatičnog stanja (uslovno stabilnog), čime je osetljivost uređaja značajno povećana.
- Ovakvi uređaji služe sa merenje razlike ubrzanja teže Δg između dve tačke.



Šematski prikaz gravimetra sa oprugom

19

Redukcija gravimetrijskih merenja

- Cilj gravimetrijskih terenskih mjerenja jeste utvrđivanje strukturne građe zemljine kore, kao i identifikovanje načina rasporeda masa anomalno veće ili manje gustine od okolnih stena.
- Da bi vrednosti ubrzanja merene na različitim tačkama međusobno uporedili i izradili kartu anomalija ubrzanja, neophodno je gravitacione uslove u tim tačkama svesti na iste uslove.
- Budući da sve tačke na Zemlji imaju različitu nadmorsku visinu, odnosno na različitoj su udaljenosti od centra mase Zemlje, izmerena vrednost ubrzanja sile Zemljine teže na svakoj tački će imati različit gravitacioni efekat visine tačke.

20

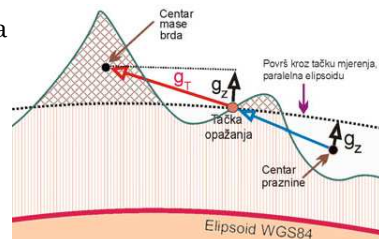
Redukcija gravimetrijskih merenja

- Mase stena koje čine reljef u neposrednoj okolini tačke na kojoj se realizuju merenja, značajno gravitaciono utiču na rezultate merenja, ali na svakoj tački na različit način, zavisno od položaja te tačke u odnosu na raspored masa koje čine reljef.
- Otklanjanje navedenih uticaja i svođenje merenja na iste uslove naziva se redukcija gravimetrijskih merenja.
- Redukcija gravimetrijskih merenja podrazumeva uvođenje sledeće tri vrste korekcija:
 - popravka za uticaj reljefa;
 - Bugeova redukcija;
 - popravka za visinu.

21

Popravka za uticaj reljefa

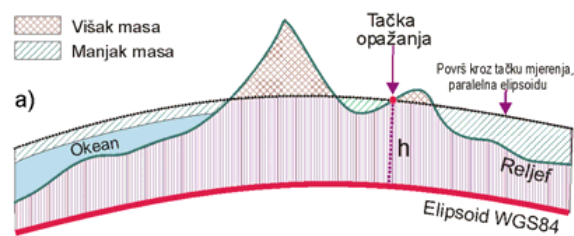
- Imajući u vidu da mase zemljine kore koje čine reljef, značajno utiču na rezultate mjerenja, kao i okolnost da će reljef na svakoj tački izazivati različite vrednosti tih uticaja, neophodno je u procesu brade podataka merenja otkloniti uticaj reljefa.
- Mase brda sa leve strane tačke opažanja, koje obuhvata površ reljefa i površ paralelna sa elipsoidom koja prolazi kroz tačku merenja izaziva ukupno gravitaciono ubrzanje g_T u tački merenja, odnosno vertikalnu komponentu g_Z .
- Na desnoj strani od tačke merenja imamo slučaj sa “nedostajućim” masama u depresiji reljefa.



22

Popravka za uticaj reljefa

- Procedura otklanjanja uticaja reljefa podrazumeva numeričko “uklanjanje” svih masa zemljine kore iznad površi kroz tačku merenja koja je paralelna sa elipsoidom i istovremeno “popunjavanje” svih depresija ispod ove površi.
- Sračunati gravitacioni uticaj reljefa se dodaje rezultatu merenja na tački, jer je uticaj reljefa uvek negativan.



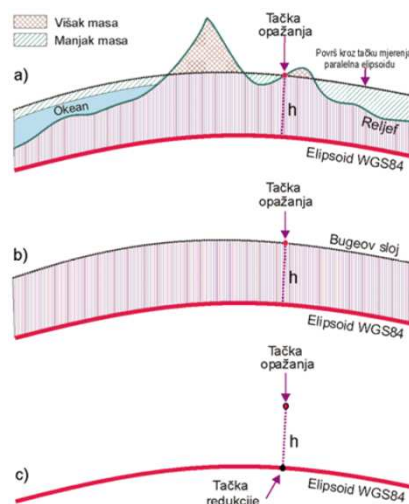
23

Bugeova redukcija

- Nakon završene popravke za uticaj reljefa, rezultati opažanja ubrzanja sile Zemljine teže svedeni su na iste uslove.
- Bugeov sloj – sloj masa zemljine kore uniformne debljine.
- Bugeov sloj u tački opažanja stvara vertikalnu gravitacionu komponentu:

$$\Delta g_B = 2\pi \cdot G \cdot \sigma \cdot h,$$

gde je G gravitaciona konstanta, σ gustina stenskih masa ovog sloja, a h njegova debljina.



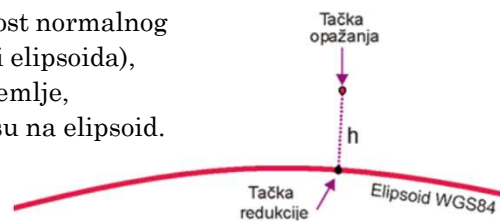
24

Popravka za visinu

- Nakon Bugeove redukcije, tačke opažanja će ostati izdignute za visinu tog sloja h iznad elipsoida, pa je neophodno uvesti popravku za visinu.
- Popravka za visinu ekvivalentna je priraštaju ubrzanja teže sa visinom i definiše se izrazom:

$$\Delta g_o = -\frac{2g_o}{R} \cdot h,$$

gde je g_o srednja vrednost normalnog ubrzanje teže (na površi elipsoida),
 R srednji poluprečnik Zemlje,
 a h visina tačke u odnosu na elipsoid.



25

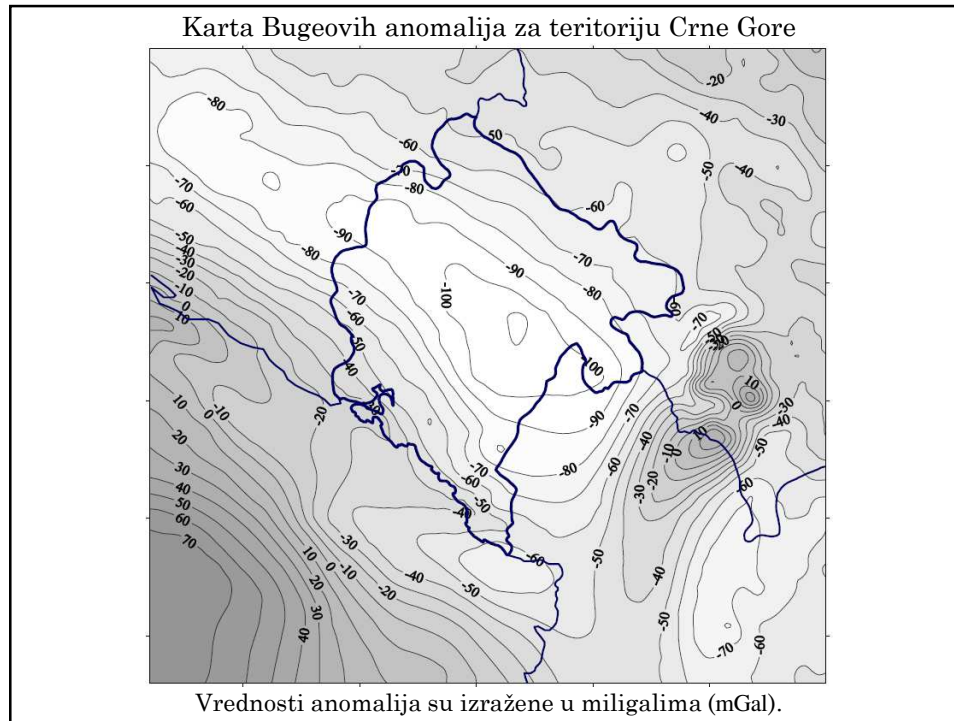
Određivanje anomalija ubrzanja teže

- Anomaliju ubrzanja teže, ili kako se često naziva Bugeova anomalija, možemo napisati kao:

$$\Delta g = g_M + \Delta g_T - \Delta g_B + \Delta g_o - g_o,$$

gde je g_M merena vrednost ubrzanja teže, Δg_T popravka za uticaj reljefa, Δg_B Bugeova popravka, Δg_o popravka za visinu i g_o vrednost normalnog ubrzanja teže na elipsoidu.

26



27

Potencijal Zemljine teže

- Polje Zemljine teže je vektorsko – svakoj tački prostora pridružen je vektor, odnosno trojka brojeva.
- Polje Zemljine teže moguće je u potpunosti predstaviti pomoću skalarnog polja.
- Potencijal Zemljine teže, skalarno polje W za koje važi:

$$\vec{g} = \nabla W.$$

- Potencijal Zemljine teže se može izraziti kao:

$$W = W_g + W_c,$$

gde je W_g potencijal gravitacione sile Zemlje, a W_c potencijal centrifugalne sile koja nastaje kao posledica Zemljine rotacije.

28

Ekvipotencijalne površi

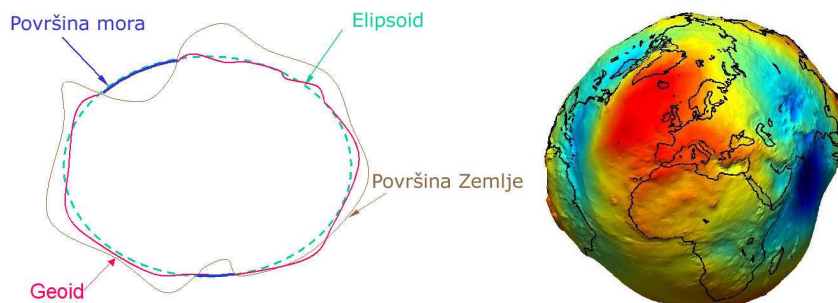
- Očekivano je da pravilnom potencijalu odgovara pravilno polje teže, a nepravilnom potencijalu nepravilno polje teže.
- Najjednostavniji način korišćenja potencijala teže W predstavlja upotreba ekvipotencijalnih površi i linija sila (vertikala).
- Ekvipotencijalna površ je površ na kojoj je potencijal Zemljine teže konstantan:

$$W = const.$$
- Pri kretanju po ekvipotencijalnoj površi nema promene potencijala, pa se stoga ne vrši nikakav bilo pozitivni ili negativni rad u statičkom smislu.

29

Geoid

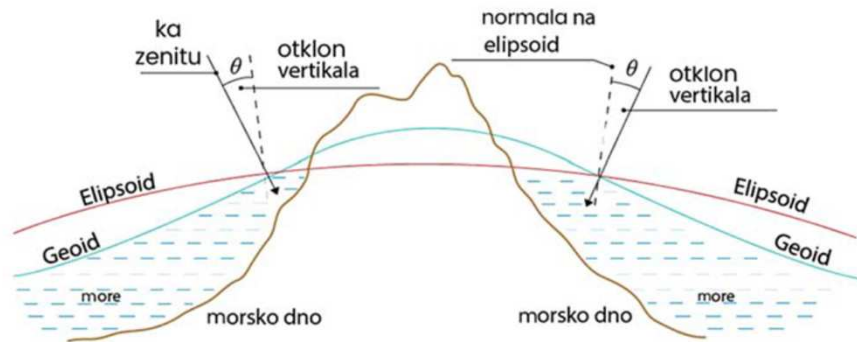
- Geoid – ekvipotencijalna površ sile Zemljine teže koja najbolje aproksimira srednji nivo mora za celu Zemlju.
- Geoid se može aproksimirati dvoosnim geocentričnim elipsoidom čija se mala osa poklapa sa Zemljinom glavnom polarnom osom inercije.



30

Odnos geoida, elipsoida i fizičke površi Zemlje

- Normala – prava koja je upravna na površ elipsoida.
- Vertikalala – kriva koja je upravna na površ geoida.

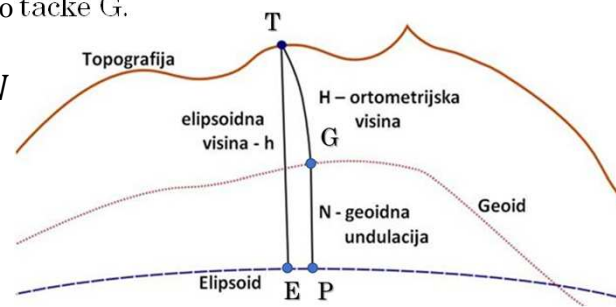


31

Elipsoidne i ortometrijske visine

- Elipsoidna visina h – rastojanje duž normale na elipsoid (od tačke E do tačke T).
- Ortometrijska (nadmorska visina) H – rastojanje duž vertikalale od tačke G do tačke T.
- Geoidna undulacija N – rastojanje duž normale na elipsoid od tačke P do tačke G.

$$H = h - N$$



32



33