FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 2
- ZADATAK 2 -

NOVI SAD, 2022

Projektovanje lokalnih geodetskih mreža

- Projekat geodetske mreže sadrži:
  - Opšti deo;
  - Stručni deo.
- U stručnom delu projekta uglavnom se definišu:
  - Oblik (konfiguracija) mreže i plan opažanja;
  - Metoda i tehnike merenja, instrumenti i pribor za merenje;
  - Kriterijumi za praćenje i kontrolu merenja;
  - Matematički model izravnanja;
  - Organizacija rada na terenu (broj izvršilaca, oprema itd.);
  - Predmer i predračun radova.

Projektovanje lokalnih geodetskih mreža

- Pošto se utvrdi konfiguracija terena, sagleda raspoloživi instrumentarij sa svojim karakteristikama i izvrši izbor metode merenja, u postupku **prethodne ocene tačnosti i analize pouzdanosti geodetske mreže**, može se odrediti tačnost i pouzdanost buduće geodetske mreže i njen odnos prema kriterijuma kvaliteta koji su definisani u okviru projektnog zadatka.

Prethodna ocena tačnosti i analiza pouzdanosti geodetske mreže

- Gaus-Markovljev model izravnanja

$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$ – funkcionalni model

$\mathbf{P}_l = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ – stohastički model

- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima

Funkcionalni model

- Jednačine popravaka

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \Delta h_{i-j} + v_{\Delta h_{i-j}} \qquad (1)$$

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \widehat{H}_j - \widehat{H}_i \qquad (2)$$

Na osnovu izraza (1) i (2) može se napisati:

$$v_{\Delta h_{i-j}} = \left(\widehat{H}_j - \widehat{H}_i\right) - \Delta h_{i-j},\ \widehat{H}_j = H_j^0 + dH_j \text{ i } \widehat{H}_i = H_i^0 + dH_i,$$

$$v_{\Delta h_{i-j}} = H_j^0 + dH_j - H_i^0 - dH_i - \Delta h_{i-j},$$

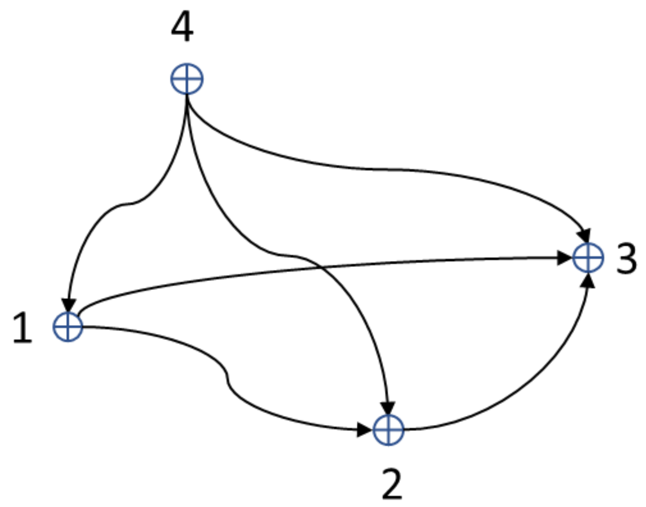
a onda:

$$v_{\Delta h_{i-j}} = dH_j - dH_i + f_{\Delta h_{i-j}},\ \ f_{\Delta h_{i-j}} = \left(H_j^0 - H_i^0\right) - \Delta h_{i-j}.$$

Funkcionalni model

- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Za potrebe praćenja izgradnje objekta, projektovana je jednodimenzionalna geodetska mreža. Merenja u mreži potrebno realizovati metodom geometrijskog nivelmana u zatvorenim nivelmanskim vlakovima. Standard merenja visinskih razlika iznosi $1\,\mathrm{mm/km}$. Na osnovu definisanog plana opažanja potrebno je sprovesti postupak prethodne ocene tačnosti i analize pouzdanosti:
a) Kada je datum definisan na klasičan način reperom 1 (H_1);
b) Kada je datum definisan minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$;
c) Kada je datum fiksiran reperima 1 i 2 (neslobodna mreža).



Jednačine popravaka:

$$v_{\Delta h_{1-2}} = dH_2 - dH_1 + f_{\Delta h_{1-2}}, \;\; f_{\Delta h_{1-2}} = \left(H_2^0 - H_1^0\right) - \Delta h_{1-2}$$

$$v_{\Delta h_{2-3}} = dH_3 - dH_2 + f_{\Delta h_{2-3}}, \;\; f_{\Delta h_{2-3}} = \left(H_3^0 - H_2^0\right) - \Delta h_{2-3}$$

$$\vdots$$

$$v_{\Delta h_{4-3}} = dH_3 - dH_4 + f_{\Delta h_{4-3}}, \;\; f_{\Delta h_{4-3}} = \left(H_3^0 - H_4^0\right) - \Delta h_{4-3}$$

Formiranje matrice dizajna:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_{\Delta h_{1-2}} \\ v_{\Delta h_{2-3}} \\ v_{\Delta h_{1-3}} \\ v_{\Delta h_{4-1}} \\ v_{\Delta h_{4-2}} \\ v_{\Delta h_{4-3}} \end{array} \end{array}$$

Stohastički model

- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Računanje standardnih devijacija visinskih razlika:

$$\sigma_{\Delta h_{i-j}} = S_{i-j}[\mathrm{km}] \cdot \sigma_{\Delta h}$$

S_{i-j} - dužina nivelmanske strane

$\sigma_{\Delta h}[\mathrm{ppm}]$ - standard merenja instrumenta

Homogenizacija težina:

$$P_{\Delta h_{i-j}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{i-j}}^2}$$

Za σ_0 usvojiti vrednost **1**!

$$P_{\Delta h_{1-2}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{1-2}}^2}, \ldots, P_{\Delta h_{4-3}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{4-3}}^2}$$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} P_{\Delta h_{1-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\Delta h_{2-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\Delta h_{1-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-3}} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \Delta h_{1-2} \\ \Delta h_{2-3} \\ \Delta h_{1-3} \\ \Delta h_{4-1} \\ \Delta h_{4-2} \\ \Delta h_{4-3} \end{array} \end{array}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n},\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$$
$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:
$$\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T\mathbf{P}\mathbf{f} + \mathbf{n}^T\hat{\mathbf{x}}$$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{f}$$

$f = n - u + d,$ n – broj merenja, u – broj nepoznatih parametara,
d – defekt datuma geodetske mreže

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Kod slobodnih geodetskih mreža matrica dizajna $\mathbf{A}$ ima nepotpun rang $r(\mathbf{A}) = r < u$, tj. broj njenih linearno nezavisnih kolona je manji od broja nepoznatih parametara u. U tom slučaju matrica koeficijenata normalnih jednačina $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$ je singularna, jer je $\det(\mathbf{N}) = 0$.
- Veličina $d = u - r$ predstavlja defekt datuma geodetske mreže. Defekt datuma geodetske mreže jeste broj nedostajućih datumskih parametara.
- Datum geodetske mreže čine parametri koji definišu koordinatni sistem, odnosno parametri koji su neophodni za definisanje geodetske mreže po obliku, položaju i veličini.
- Defekt datuma geodetske mreže zavisi od vrste merenih veličina u geodetskoj mreži.

Model geodetske mreže	Merene veličine	Defekt $d = u - r$	Datumski parametri
1D	Visinske razlike	1	Translacija po H osi

Klasičan način definisanja datuma geodetske mreže

- Kod klasičnog načina definisanja datuma fiksira se neophodan (minimalan) broj koordinata tačaka/repera mreže.
- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Defekt datuma geodetske mreže je 1, pa je neophodno fiksirati visinu jednog od repera mreže. Fiksiramo visinu H_1 repera 1.

Matrica datumskih uslova:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 \end{array} \\ \mathbf{R}^T = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^- & \mathbf{R}^- \\ (\mathbf{R}^-)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^-$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 2 - Primer.xlsx.*

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Kod ovog načina definisanja datuma sve tačke imaju jednak doprinos definiciji datuma geodetske mreže. Težište mreže predstavlja referentnu tačku mreže.
- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Matrica datumskih uslova formira se na sledeći način:

$$\mathbf{B}^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \end{array}$$

m – broj repera mreže

Kontrola računanja:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{E},$$

gde je $\mathbf{E}$ jedinična matrica.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^+ & \mathbf{B}^+ \\ (\mathbf{B}^+)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 2 - Primer.xlsx.*

Neslobodna geodetska mreža

- Kod neslobodnih geodetskih nedostajući datumski parametri određuju se merenjem. Matrica dizajna $\mathbf{A}$ ima potpun rang, pa je matrica koeficijenata normalnih jednačina $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$ regularna, jer je $\det(\mathbf{N}) \neq 0$.
- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

  Reperi 1 i 2 su dati. Shodno tome, visinska razlika Δh_{1-2} se izbacuje.

  U ovom slučaju matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{P}$ formiraju se na sledeći način:

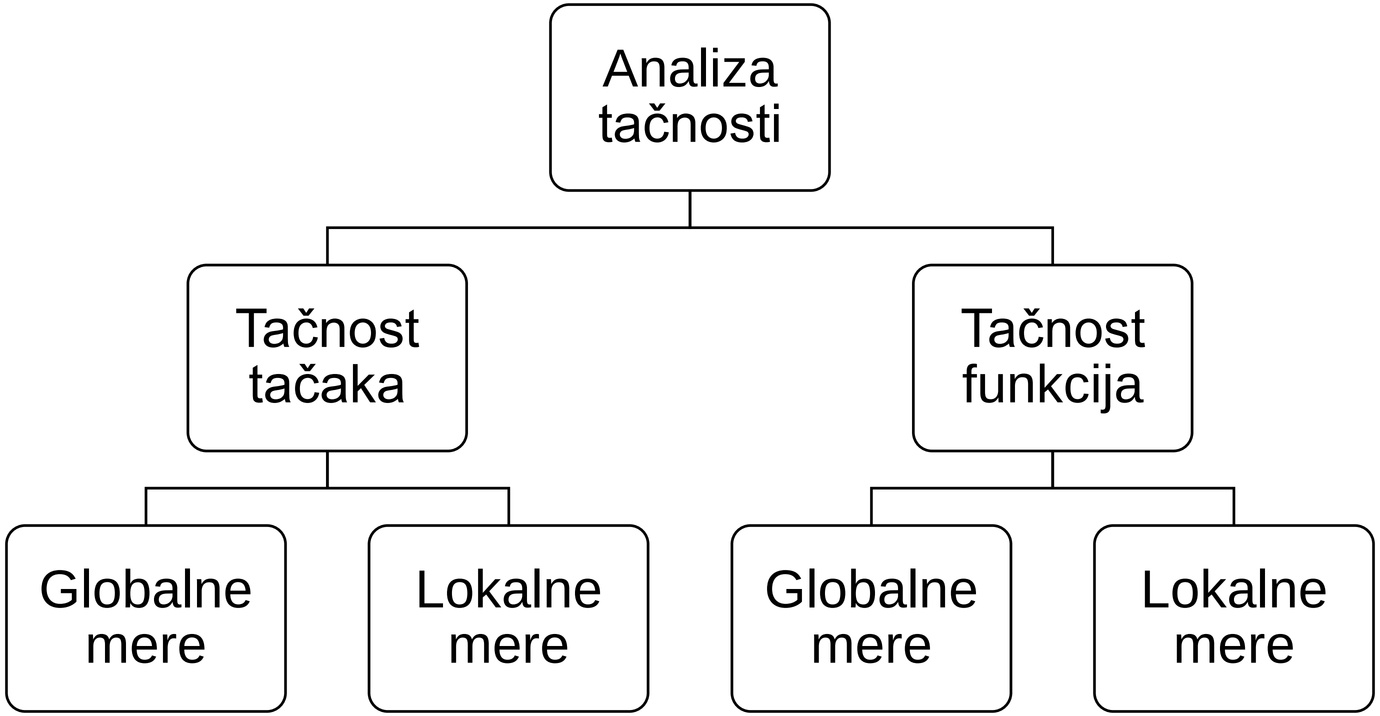
$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} dH_3 & dH_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} P_{\Delta h_{2-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\Delta h_{1-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-3}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \Delta h_{2-3} \\ \Delta h_{1-3} \\ \Delta h_{4-1} \\ \Delta h_{4-2} \\ \Delta h_{4-3} \end{array}
$$

$$
\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}
$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 2 - Primer.xlsx.*

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Ocena tačnosti može biti globalna ako se određuje jedna vrednost kao reprezent za ceo skup veličina u geodetskoj mreži ili lokalna ocena tačnosti ako se ona odnosi na pojedine veličine.



Lokalne mere tačnosti

- **Standardne devijacije visina repera**

$$\hat{\sigma}_{H_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{H}_i}}$$

σ_0 - *a priori* standardna devijacija

$Q_{\hat{H}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{H}_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & Q_{\hat{H}_m} \end{bmatrix}$$

- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

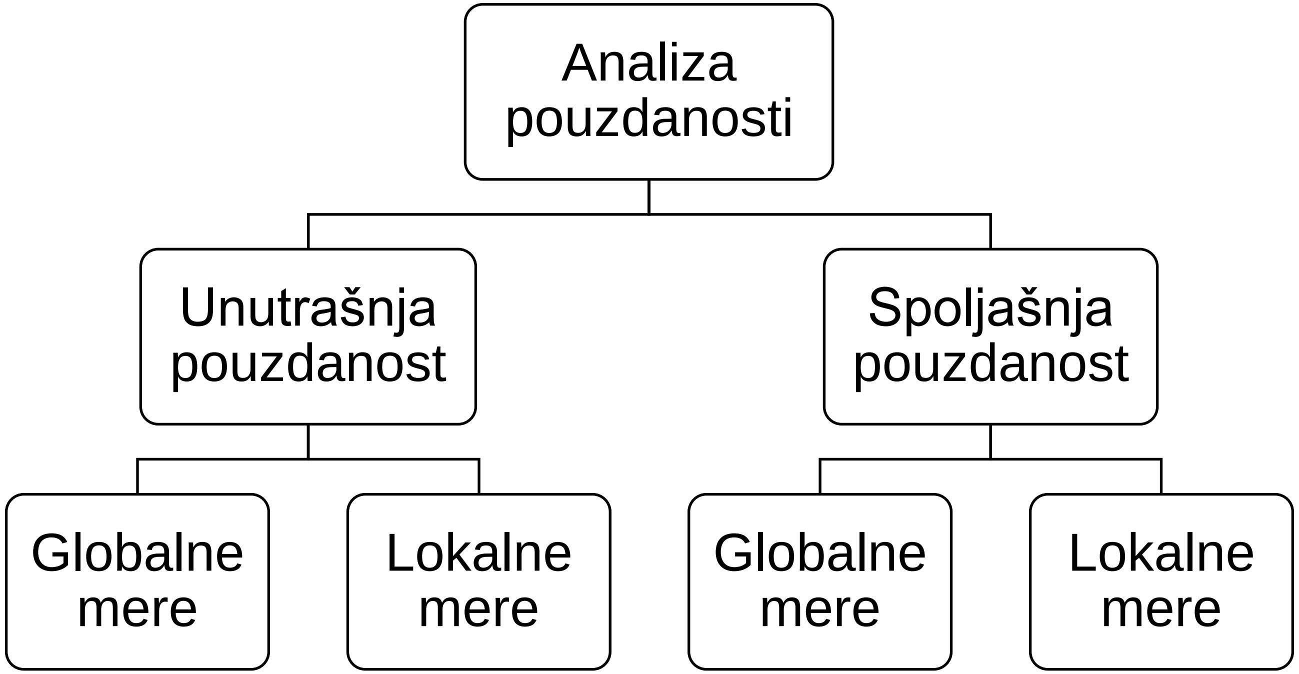
$$\hat{\sigma}_{H_1} = 1 \cdot \sqrt{Q_{\hat{H}_1}}$$

$$\vdots$$

$$\hat{\sigma}_{H_4} = 1 \cdot \sqrt{Q_{\hat{H}_4}}$$

Analiza pouzdanosti geodetskih mreža

- Pouzdanost geodetske mreže predstavlja kvalitet predloženog rešenja sa aspekta mogućnosti otkrivanja grubih grešaka u merenjima (unutrašnja pouzdanost), i sa aspekta uticaja neotkrivenih grubih grešaka na ocene traženih veličina (spoljašnja pouzdanost).



Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- **Koeficijenti unutrašnje pouzdanosti**

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T$ – kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}$ – kofaktorska matrica popravaka merenih veličina

$r_i = Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i} \cdot P_i$

$Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i}$ – i-ti dijagonalni element matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$

P_i – i-ti dijagonalni element matrice težina $\mathbf{P}$

Kontrola:

$$\sum ri = f,$$

$f = n - u + d$ – broj stepeni slobode.

Koeficijent r_i predstavlja uticaj grube greške i-tog opažanja na i-tu popravku.
Verovatnoća otkrivanja grube greške je veća ukoliko je koeficijent r_i veći.
$\boldsymbol{r_i < 0.3}$ **– nepouzdano merenje,** $\boldsymbol{r_i \geq 0.3}$ **– pouzdano merenje**

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- **Marginalna gruba greška koja se može otkriti *Data snooping* testom**

$G_i = \frac{\sigma_0\sqrt{\lambda_0}}{P_i\sqrt{Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i}}}$, $\sqrt{\lambda_0}$ - parametar necentralnosti

$\sqrt{\lambda_0} = t_{1-\beta_0} + t_{1-\alpha_0/2}$

$t_{1-\beta_0}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojenu moć testa

$t_{1-\alpha_0/2}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojeni nivo značajnosti

$\sqrt{\lambda_0} = 0.842 + 1.96 = \mathbf{2.802}$, za $1 - \beta_0 = 0.80$ i $\alpha_0 = 0.05$.

Marginalna greška G_i predstavlja vrednost grube greške koja se može otkriti *Data snooping* testom, pod pretpostavkom postojanja samo jedne grube greške.

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Koeficijenti unutrašnje pouzdanosti:

$$r_1 = Q_{\hat{v}_1\hat{v}_1} \cdot P_{\Delta h_{1-2}}$$
$$\vdots$$
$$r_6 = Q_{\hat{v}_6\hat{v}_6} \cdot P_{\Delta h_{4-3}}$$

Marginalne grube greške G_i:

$$G_1 = \frac{1 \cdot 2.802}{P_{\Delta h_{1-2}}\sqrt{Q_{\hat{v}_1\hat{v}_1}}}$$
$$\vdots$$
$$G_6 = \frac{1 \cdot 2.802}{P_{\Delta h_{4-3}}\sqrt{Q_{\hat{v}_6\hat{v}_6}}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{v}_1\hat{v}_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & Q_{\hat{v}_6\hat{v}_6} \end{bmatrix}$$

ZADATAK 2

- Formirati matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{P}$ na osnovu definisanog plana opažanja i usvojene tačnosti planiranih merenja. Dužine nivelmanskih strana sračunati iz približnih koordinata tačaka datih u prvom zadatku.
- Datum geodetske mreže definisati:
  a) Na klasičan način;
  b) Minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$;
  c) Fiksiranjem repera 1, 2 i 3 (neslobodna mreža).
- Sračunati prethodno navedene parametre tačnosti za sva tri rešenja.
- Sračunati prethodno navedene parametre unutrašnje pouzdanosti za sva tri rešenja.

ZADATAK 2

- Proveriti da li su ispunjeni kriterijumi definisani u okviru projektnog zadatka:
  1. $\hat{\sigma}_{H_i'} < 0.4\ \mathrm{mm}$
  2. $r_i \geq 0.3$
  3. $|G_i| < 3\sigma_0$