FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

RAČUN IZRAVNANJA
VEŽBA 2

NOVI SAD, 2024.

Greške

- Ako je neka veličina više puta izmerena, onda će se dobijene vrednosti razlikovati u granicama tačnosti merenja koja zavisi od: instrumenta, metode rada, operatera, atmosferskih uslova i mnogih drugih spoljnih faktora.

- Postoje:
  - grube greške
  - sistematske greške
  - slučajne greške

Grube greške

- Kada se u nizu merenja neka vrednost znatno razlikuje od ostalih (iznad očekivanja) to merenje sadrži grubu grešku.

- Grube greške mogu nastati usled nepažnje ili nedovoljnog iskustva operatera, nepovoljnih ili promenljivih uslova tokom merenja, itd.

- Nakon što su merenja realizovana uz njihovu neposrednu analizu na terenu, pristupa se statističkoj analizi rezultata merenja, tj. primeni statističkih testova za otkrivanje grubih grešaka u rezultatima merenja (primeni tzv. testova na grube greške).

Šta je test na grube greške?

- Suština testiranja rezultata merenja na prisustvo grubih grešaka je da se statistički utvrdi da li neki rezultat merenja sadrži grubu grešku, tj. odstupa od normalnog rasporeda.

- Rezultati merenja jedne veličine smatraju se slučajnim veličinama koje se pokoravaju zakonu normalnog rasporeda:

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

gde su: $X_i, i = 1,2,\cdots,n$ – rezultati merenja veličine X;

μ – matematičko očekivanje; σ – standardna devijacija.

STANDARDIZOVANI NORMALNI RASPORED

- Standardizovani normalni raspored ima izuzetan praktični značaj u obradi rezultata merenja u geodeziji.
- Za slučajne greške merenja $\varepsilon = X - \mu$ mogu se odrediti njihove standardizovane slučajne veličine:

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

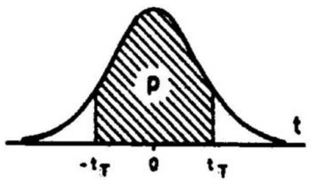
Slučajna veličina t sledi normalni raspored sa parametrima $\mu = 0$ i

$\sigma = 1$ koji se naziva standardizovani normalni raspored verovatnoća $t \sim N(\mu, \sigma) = t \sim N(0,1)$.

Kompletno rešenje zadataka 2.1, 2.2 i 2.3 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

Tabela 1

$p(-t_T < t < t_T) = p$



p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,012	0,025	0,038	0,050	0,063	0,075	0,088	0,100	0,113
0,1	0,125	0,138	0,151	0,163	0,176	0,189	0,202	0,214	0,227	0,240
0,2	0,253	0,266	0,279	0,292	0,305	0,318	0,331	0,345	0,358	0,371
0,3	0,385	0,398	0,412	0,426	0,439	0,453	0,467	0,481	0,495	0,510
0,4	0,524	0,538	0,553	0,568	0,582	0,597	0,612	0,628	0,643	0,659
0,5	0,674	0,690	0,706	0,722	0,739	0,755	0,772	0,789	0,806	0,824
0,6	0,841	0,859	0,878	0,896	0,915	0,935	0,954	0,974	0,994	1,015
0,7	1,036	1,058	1,080	1,103	1,126	1,150	1,175	1,200	1,227	1,254
0,8	1,282	1,311	1,341	1,372	1,405	1,440	1,476	1,514	1,555	1,599
0,9	1,645	1,696	1,751	1,812	1,881	1,960	2,054	2,171	2,327	2,576

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,90	1,645	1,650	1,655	1,660	1,665	1,670	1,675	1,680	1,685	1,691
0,91	1,696	1,701	1,706	1,712	1,717	1,723	1,728	1,734	1,740	1,745
0,92	1,751	1,757	1,763	1,769	1,775	1,781	1,787	1,793	1,800	1,806
0,93	1,812	1,819	1,825	1,832	1,839	1,846	1,853	1,860	1,867	1,874
0,94	1,881	1,889	1,896	1,904	1,911	1,919	1,927	1,935	1,944	1,952
0,95	1,960	1,969	1,978	1,987	1,996	2,005	2,015	2,024	2,034	2,044
0,96	2,054	2,065	2,075	2,086	2,097	2,109	2,121	2,133	2,145	2,158
0,97	2,171	2,184	2,198	2,212	2,227	2,242	2,258	2,274	2,291	2,308
0,98	2,327	2,346	2,366	2,387	2,409	2,433	2,458	2,484	2,513	2,543
0,99	2,576	2,612	2,652	2,697	2,748	2,807	2,878	2,968	3,090	3,291

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,990	2,576	2,580	2,583	2,587	2,590	2,594	2,598	2,601	2,605	2,609
0,991	2,612	2,616	2,620	2,624	2,628	2,632	2,636	2,640	2,644	2,648
0,992	2,652	2,657	2,661	2,665	2,670	2,674	2,679	2,683	2,688	2,692
0,993	2,697	2,702	2,707	2,71[illegible]	2,717	2,722	2,727	2,732	2,737	2,743
0,994	2,748	2,754	2,759	2,765	2,771	2,777	2,782	2,789	2,795	2,801
0,995	2,807	2,814	2,820	2,827	2,834	2,841	2,848	2,856	2,863	2,871
0,996	2,878	2,886	2,895	2,903	2,912	2,920	2,929	2,939	2,948	2,958
0,997	2,968	2,978	2,989	3,000	3,012	3,024	3,036	3,049	3,062	3,076
0,998	3,090	3,016	3,122	3,138	3,156	3,175	3,195	3,216	3,239	3,264
0,999	3,291	3,320	3,353	3,389	3,431	3,481	3,540	3,615	3,719	3,890

Kompletno rešenje zadataka 2.1, 2.2 i 2.3 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

VEROVATNOĆA STANDARDNE GREŠKE

Iz tabele 1 može se za usvojenu vrednost verovatnoće (znači po argumentu p) odrediti interval u kome se nalazi slučajna veličina $t \in (-t_T, +t_T)$, tj. odrediti kvantil t_T ili obratno, iz istih tablica, na osnovu kvantila t_T može da se odredi verovatnoća p. Verovatnoće za normalni raspored prikazane su u tableli 1 i u njima se čita broj t_T, po argumentu verovatnoće p.

Takođe, kvantil standardizovanog normalnog rasporeda se može odrediti i u programu Excel pomoću jedne od sledeće dve navedene funkcije:

Excel: $N_{1-\alpha/2}$ → **NORMINV($\mathbf{1-(\alpha/2)}$,0,1)**

Excel: $N_{1-\alpha/2}$ → **NORMSINV($\mathbf{1-(\alpha/2)}$)**

Kompletno rešenje zadataka 2.1, 2.2 i 2.3 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx*.

VEROVATNOĆA STANDARDNE GREŠKE

50% VEROVATNA GREŠKA – $E_{50} = 0.6745 \cdot \sigma$

50% verovatna greška definiše granice za koje se može reći da bilo koje merenje ima istu šansu da bude unutar ili izvan njih.

95% VEROVATNA GREŠKA – $E_{95} = 1.9600 \cdot \sigma$

99% VEROVATNA GREŠKA – $E_{99} = 2.5758 \cdot \sigma$

99.7% VEROVATNA GREŠKA – $E_{99.7} = 2.9677 \cdot \sigma$

Verovatna greška $E_{99.7}$ se često uzima kao parameter za otkrivanje grubih grešaka.

Verovatnoća pojave greške bilo kog rezultata merenja u granicama od $-\sigma$ do $+\sigma$ iznosi 68.3%.

Kompletno rešenje zadataka 2.1, 2.2 i 2.3 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

Testiranja rezultata merenja na prisustvo grubih grešaka

- Prilikom testiranja rezultata merenja na prisustvo grubih grešaka razlikuju se dva slučaja:
  - slučaj kada je poznato standardno odstupanje merenja σ;
  - slučaj kada nije poznato standardno odstupanje merenja σ.

- Rezultati merenja mogu se testirati na prisustvo grubih grešaka korišćenjem:
  - kriterijuma značajnosti;
  - raspona merenja;
  - standardne greške σ.

Kriterijum značajnosti

- Testiranje rezultata merenja na prisustvo grubih grešaka primenom kriterijuma značajnosti je iterativan postupak.
- 1. korak:
  - iz niza rezultata merenja $X_i, i = 1,2,\cdots,n$ jedne veličine X odredi se:
    - srednja vrednost merenja $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
    - disperzija merenja $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {V_i}^2}{n-1}$

    Napomena: Računa se samo ako nije poznato standardno odstupanje merenja σ.

    - broj stepeni slobode (broj suvišnih merenja) $f = n - 1$

Kompletno rešenje zadatka 2.4 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx*.

Kriterijum značajnosti

- 2. korak:
  - nađe se X_k koje najviše odstupa od srednje vrednosti $\bar{X}$:

  $max|X_k - \bar{X}|$ - sumnjiv rezultat merenja
  - nakon što se iz skupa rezultata merenja izbaci rezultat X_k odredi se:
    - nova srednja vrednost merenja $\bar{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} X_i$
    - nova disperzija merenja $S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \bar{X})^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} {V_i}^2}{n-2}$

    Napomena: Računa se samo ako nije poznato standardno odstupanje merenja σ.
    - novi broj stepeni slobode (broj suvišnih merenja) $f = n - 2$
    - razlika između sumnjivog rezultata merenja i srednje vrednosti bez tog rezultata

$$\Delta_n = |X_k - \bar{X}_1|$$

Kompletno rešenje zadatka 2.4 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx*.

Kriterijum značajnosti

- 2. korak:
  - odredi se dozvoljeno odstupanje rezultata merenja od srednje vrednosti bez tog rezultata:
    - ukoliko je poznato standardno odstupanje merenja σ

$$\Delta_G = z_{\alpha/2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

    - ukoliko nije poznato standardno odstupanje merenja σ

$$\Delta_G = t_{\alpha/2,f} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

Kompletno rešenje zadatka 2.4 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx*.

Kriterijum značajnosti

- Ukoliko je $\Delta_n > \Delta_G$, to znači da je rezultat merenja X_k opterećen grubom greškom; taj rezultat se izbacuje iz skupa merenja, a ukupan broj merenja postaje $n_1 = n - 1$:

  ponavlja se korak 2

- Ukoliko sumnjivi rezultat merenja zapravo nije opterećen grubom greškom usvajaju se $n, \bar{X}$ i S (ukoliko nije poznato standardno odstupanje merenja σ) iz prethodne iteracije.

Kompletno rešenje zadatka 2.4 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx*.

STUDENTOV (t) RASPORED

- Studentov (t) raspored koristi se s ciljem poređenja srednje vrednosti populacije sa srednjom vrednošću uzorka zasnovanom na broju stepeni slobode uzorka f. Sličan je normalnom rasporedu, s tim što se normalan raspored primenjuje na celu populaciju, a t raspored na uzorak. t raspored se uglavnom koristi kada je dimenzija uzorka do 30 elemenata.

Slično normalnom i studentov (t) raspored je simetričan. t raspored se koristi i prilikom **definisanja intervala poverenja srednje vrednosti populacije** u funkciji:

a) srednje vrednosti, 2) varijanse uzorka i 3) broja stepeni slobode.

Kompletno rešenje zadatka 2.4 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx*.

STUDENTOV (t) RASPORED

- Takođe, t raspored se koristi prilikom donošenja odluke da li srednja vrednost uzorka predstavlja pouzdanu ocenu srednje vrednosti populacije.

Slično normalnom i studentov (t) raspored je simetričan. t raspored se koristi i prilikom definisanja intervala poverenja srednje vrednosti populacije u funkciji:

a) srednje vrednosti, 2) varijanse uzorka i 3) broja stepeni slobode.

Kompletno rešenje zadatka 2.4 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx*.

Tabela 2
Studentov raspored

One Sided	75%	80%	85%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.75%	99.9%	99.95%
Two Sided	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Kompletno rešenje zadatka 2.4 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx*.

STUDENTOV (t) RASPORED

Iz tabele 2 može se za usvojenu vrednost verovatnoće p (*One Sided* i *Two Sided* procenti) i odgovarajući broj stepeni slobode f odrediti kvantil t_{1-p} (*One Sided*) ili $t_{(1-p)/2}$ (*Two Sided*) ili obratno, iz istih tablica, na osnovu kvantila može da se odredi verovatnoća p i broj stepeni slobode f. Verovatnoće za studentov (t) raspored prikazane su u tableli 2 i u njima se čita broj t_{1-p} (*One Sided*) ili $t_{(1-p)/2}$ (*Two Sided),* po argumentu verovatnoće p i odgovarajućem broj stepeni slobode f.

Takođe, kvantil studentovog rasporeda se može odrediti i u programu Excel pomoću sledećih funkcija:

Za jednostrani test (*One Sided*):

Excel: $t_{1-p,f} \rightarrow$ **TINV(2** $*\,\alpha$**,f)**

Za dvostrani test (*Two Sided*):

Excel: $t_{(1-p)/2,f} \rightarrow$ **TINV(**α**,f)**

Kompletno rešenje zadatka 2.4 dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx*.

Raspon merenja

- Testiranje rezultata merenja na prisustvo grubih grešaka primenom raspona merenja je takođe iterativan postupak.
- Ovaj postupak je naročito efikasan za mali broj rezultata merenja $(\mathrm{n} < 10)$

Testiranje na grube greške:

- iz niza rezultata merenja $X_i, i = 1,2,\cdots,n$ jedne veličine X odredi se:
  - srednja vrednost merenja $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - broj merenja n
  - $X_{\max}$ i $|X_{\max} - \bar{X}|$
  - $X_{\min}$ i $|X_{\min} - \bar{X}|$
  - raspon merenja $\omega_{\mathrm{n}} = |X_{\max} - X_{\min}|$
  - dozvoljena vrednost raspona (test statistika) $\omega_G = \omega_{p,n} \cdot \sigma_\alpha$, gde je $\omega_{p,n}$ kvantil normiranog raspona.

Kompletno rešenje zadatka 2.5 (a) dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

Raspon merenja

- Ukoliko je $\omega_n > \omega_G$, to znači da je rezultat merenja X_k opterećen grubom greškom.
- Ukoliko sumnjivi rezultat merenja zapravo nije opterećen grubom greškom usvajaju se n i $\bar{X}$ iz prethodne iteracije.
- Ukoliko je $\omega_n > \omega_G$, iz skupa rezultata merenja izbaci se $X_{\max}$ ili $X_{\min}$ ($\max|X_k - \bar{X}|$ - sumnjiv rezultat merenja) koje najviše odstupa od srednje vrednosti $\bar{X}$, a ukupan broj merenja postaje $n_1 = n - 1$.
- Nakon što se iz skupa rezultata merenja izbaci rezultat X_k ponavlja se celokupan postupak testiranja na grube greške bez izbačenog rezultata X_k:

Kompletno rešenje zadatka 2.5 (a) dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

Raspon merenja

- iz niza rezultata merenja $X_i, i = 1,2,\cdots,n-1$ jedne veličine X, bez izbačenog rezultata X_k, odredi se:
  - Nova srednja vrednost merenja $\bar{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} X_i$
  - Novi broj merenja $n_1 = n - 1$
  - Novi $X_{\max}$ i $|X_{\max} - \bar{X}|$
  - Novi $X_{\min}$ i $|X_{\min} - \bar{X}|$
  - Novi raspon merenja $\omega_n = |X_{\max} - X_{\min}|$
  - Nova dozvoljena vrednost raspona (test statistika) $\omega_G = \omega_{p,n} \cdot \sigma_\alpha$, gde je $\omega_{p,n}$ kvantil normiranog raspona.

- Postupak se sprovodi sve dok $\omega_n < \omega_G$, tj. dok se ne utvrdi da rezultat merenja X_k nije opterećen grubom greškom.

Kompletno rešenje zadatka 2.5 (a) dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

Normirani raspon

Iz tabele 3 može se za usvojenu vrednost verovatnoće p i broja merenja n odrediti kvantil $\omega_{p,n}$ ili obratno, iz iste tablice, na osnovu kvantila može da se odredi verovatnoća p i broj merenja n. Verovatnoće za normirani raspon prikazane su u tableli 3 i u njima se čita broj $\omega_{p,n}$, po argumentu verovatnoće p i broju merenja n.

Kompletno rešenje zadatka 2.5 (a) dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

Tabela 3
Normirani raspon

TABELA IX

Kvantili W_p normiranog raspona $W = w_n/\sigma$ rezultata merenja, gde je σ standard osnovnog rasporeda; matematičko očekivanje $M(W)$ i standardno odstupanja $\sigma(W)$ u jedinicama parametra σ.

n	$M(W)$ α_n	$\sigma(W)$ β_n	$\frac{\sigma(W)}{M(W)}$ γ_n	verovatnoća p 0,95	0,99	0,999
2	1,12838	0,853	0,756	2,77	3,64	4,65
3	1,693	0,888	0,525	3,31	4,12	5,06
4	2,059	0,880	0,427	3,63	4,40	5,31
5	2,326	0,864	0,371	3,86	4,60	5,48
6	2,534	0,848	0,335	4,03	4,76	5,62
7	2,704	0,833	0,308	4,17	4,88	5,73
8	2,847	0,820	0,288	4,29	4,99	5,82
9	2,970	0,808	0,272	4,39	5,08	5,90
10	3,078	0,797	0,259	4,47	5,16	5,97
11	3,173	0,787	0,248	4,55	5,23	6,04
12	3,258	0,778	0,239	4,62	5,29	6,09
13	3,336	0,770	0,231	4,69	5,35	6,14
14	3,407	0,762	0,224	4,74	5,40	6,19
15	3,472	0,755	0,217	4,80	5,45	6,23
16	3,532	0,749	0,212	4,85	5,49	6,28
17	3,588	0,743	0,207	4,89	5,54	6,32
18	3,640	0,738	0,203	4,93	5,57	6,35
19	3,689	0,733	0,199	4,97	5,61	6,38
20	3,735	0,729	0,195	5,01	5,65	6,41
60	4,639					
100	5,015				Kvantili W_p	
200	5,492					
500	6,073					
1000	6,483					

Kompletno rešenje zadatka 2.5 (a) dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

Standardna greška σ

- Testiranje rezultata merenja na prisustvo grubih grešaka primenom standardne greške σ je takođe iterativan postupak.

Testiranje na grube greške:

- iz niza rezultata merenja $X_i, i = 1,2,\cdots,n$ jedne veličine X odredi se:
  - disperzija merenja $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {V_i}^2}{n-1}$
  - srednja vrednost merenja $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - broj stepeni slobode $f = n - 1$
  - $\mathrm{X_{max}}$ i $|\mathrm{X_{max}} - \bar{\mathrm{X}}|$
  - $\mathrm{X_{min}}$ i $|\mathrm{X_{min}} - \bar{\mathrm{X}}|$
  - Test statistika $\Delta_G = \frac{\chi^2_{p,f}}{f} \cdot \sigma^2_{\alpha}$, gde je $\chi^2_{p,f}$ kvantil hi na kvadrat rasporeda.

Kompletno rešenje zadatka 2.5 (b) dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

Standardna greška σ

- Ukoliko je $S^2 > \Delta_G$, to znači da je rezultat merenja X_k opterećen grubom greškom.
- Ukoliko sumnjivi rezultat merenja zapravo nije opterećen grubom greškom usvajaju se n i $\bar{X}$ iz prethodne iteracije.
- Ukoliko je $S^2 > \Delta_G$, iz skupa rezultata merenja izbaci se $X_{\max}$ ili $X_{\min}$ ($\max|X_\mathrm{k} - \bar{X}|$ - sumnjiv rezultat merenja) koje najviše odstupa od srednje vrednosti $\bar{X}$, a ukupan broj merenja postaje $n_1 = n - 1$.
- Nakon što se iz skupa rezultata merenja izbaci rezultat X_k ponavlja se celokupan postupak testiranja na grube greške bez izbačenog rezultata X_k:

Kompletno rešenje zadatka 2.5 (b) dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

Standardna greška σ

- iz niza rezultata merenja $X_i, i = 1,2,\cdots,n-1$ jedne veličine X, bez izbačenog rezultata X_k, odredi se:
  - Nova disperzija merenja $S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-\bar{X})^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} {V_i}^2}{n-2}$
  - Nova srednja vrednost merenja $\bar{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} X_i$
  - Novi broj stepeni slobode $f_1 = n - 2$
  - Novi $\mathrm{X_{max}}$ i $|\mathrm{X_{max}} - \bar{\mathrm{X}}|$
  - Novi $\mathrm{X_{min}}$ i $|\mathrm{X_{min}} - \bar{\mathrm{X}}|$
  - Nova test statistika $\Delta_G = \frac{\chi^2_{p,f}}{f} \cdot \sigma_\alpha^2$, gde je $\chi^2_{p,f}$ kvantil hi na kvadrat rasporeda.

- Postupak se sprovodi sve dok $S^2 < \Delta_G$, tj. dok se ne utvrdi da rezultat merenja X_k nije opterećen grubom greškom.

Kompletno rešenje zadatka 2.5 (b) dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

χ^2 raspored

Iz tabele 4 može se za usvojenu vrednost verovatnoće p i broja stepeni slobode f (u ovoj tabeli oznaka je ν) odrediti kvantil $\chi^2_{1-p,f}$ ili obratno, iz iste tablice, na osnovu kvantila može da se odredi verovatnoća p i broja stepeni slobode f. Verovatnoće za hi na kvadrat raspored prikazane su u tableli 4 i u njima se čita broj $\chi^2_{1-p,f}$, po argumentu verovatnoće p i broja stepeni slobode f.

Takođe, kvantil hi na kvadrat rasporeda se može odrediti i u programu excel pomoću sledeće funkcije:

Excel:$\chi^2_{1-p,f} \rightarrow$ **CHIINV(**α**,f)**

Kompletno rešenje zadatka 2.5 (b) dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*

Tabela 4 - χ^2raspored

Table D.2 Critical values for χ^2 distribution

α / υ	0.999	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	0.000002	0.000039	0.000157	0.000982	0.004	0.016	0.455	2.705	3.841	5.023	6.634	7.877	10.81
2	0.002	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.81
3	0.02	0.07	0.12	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.82	9.35	11.34	12.84	16.26
4	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.31
6	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.33	20.09	21.96	26.12
9	1.15	1.74	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	1.83	2.60	3.05	3.82	4.58	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26
12	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	3.04	4.08	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	4.91	6.27	7.02	8.23	9.39	10.86	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	5.41	6.84	7.63	8.91	10.12	11.63	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	5.92	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	6.45	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	6.98	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	7.53	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	8.09	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	8.65	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	9.22	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	9.80	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	10.39	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	10.99	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	11.59	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
35	14.69	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	34.34	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27	66.62
40	17.92	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	24.67	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	31.74	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
120	77.76	83.85	86.92	91.57	95.70	100.62	119.33	140.23	146.57	152.21	158.95	163.65	173.6

Kompletno rešenje zadatka 2.5 (b) dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 2.xlsx.*