



FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
DEPARTMAN ZA GRAĐEVINARSTVO I GEODEZIJU
GRAĐEVINARSTVO



GEODEZIJA

Merenje dužina i visinskih razlika

Doc. dr Mehmed Batilović, mast. inž. geodez.

Novi Sad, 2023/2024

1

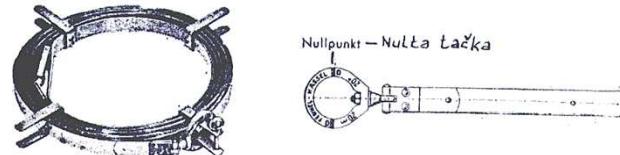
Merenje dužina

- Dužina – rastojanje između dve tačke materijalizovane na terenu.
- Merenje dužina može se izvoditi:
 - direktno;
 - indirektno:
 - optički;
 - elektronski;
 - iz pomoćnog trougla.

2

Direktno merenje dužina

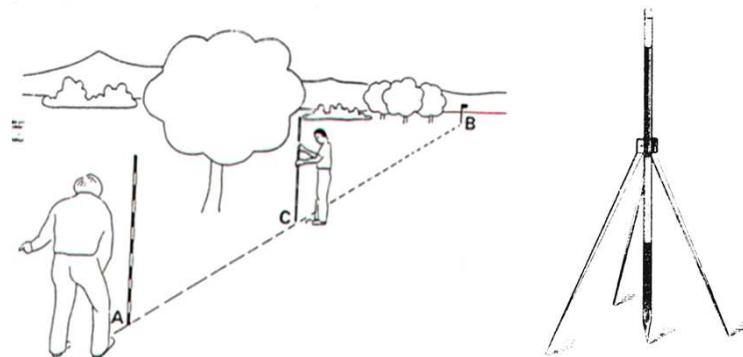
- Merenje dužina do pre nekoliko decenija izvodilo se direktno pomoću traka od metala, koje se zovu pantljike.
- Osnovna podela pantljika je na:
 - poljske pantljike – dužine od 25 do 50 m;
 - ručne pantljike – dužine 10, 20 i 25 m.



3

Merenje dužina poljskom pantljikom

- Krajnje tačke se signalisu značkama, a pantljika pruža po pravcu duži koja treba da se izmeri.
- Pantljika se postavlja u pravac pomoću treće značke.



4

Merenje dužina poljskom pantljikom

- Pantljika se zategne duž pravca tako da se kraj pantljike poklopi sa početnom tačkom, nakon čega se drugi kraj pantljike obeleži na zemlji.
- U sledećem koraku vrši se povlačenje pantljike i merenje od obeleženog kraja prve dužine pantljike prema drugom kraju merene duži.
- Nakon izmerenog punog broja dužina pantljike, broj pantljika se pomnoži sa nominalnom dužinom pantljike i na tu dužinu se doda ostatak koji se meri od obeleženog kraja poslednje cele pantljike do druge krajnje tačke merene duži.
- Kontrolno merenje se sprovodi ponovnim merenjem duži sa drugog kraja.

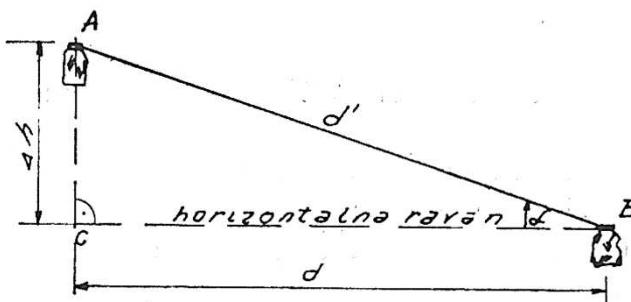
5

Merenje dužina poljskom pantljikom

- Merenje dužina pantljikom, vrši se koso po terenu.

- Horizontalna dužina određuje se na sledeći način:

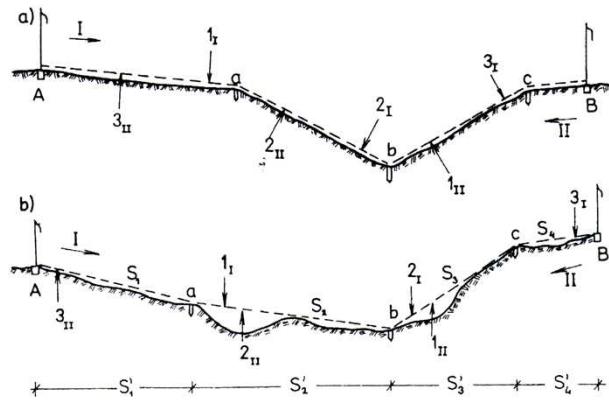
$$d = \sqrt{d'^2 - \Delta h^2}, \quad d = d' - \frac{\Delta h^2}{2d'} - \frac{\Delta h^4}{8d'^3}.$$



6

Merenje dužina poljskom pantljikom

- Usled neravnomjerne promene nagiba terena, dužinu između tačaka potrebno je podeliti na delove u kojima je pad približno ravnomeran.



7

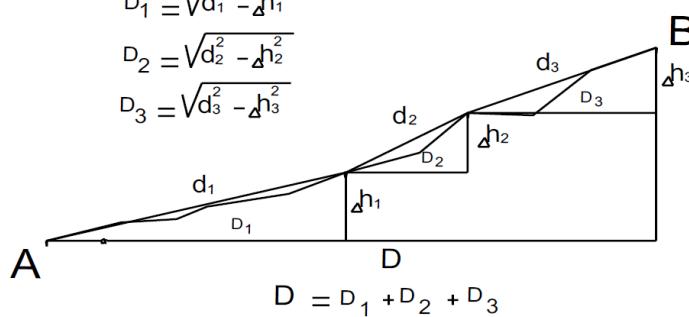
Merenje dužina poljskom pantljikom

- Merene dužine koja se odnose na pojedinačne segmente moraju se redukovati na horizontalnu ravan, pri čemu je neophodno poznavati visinske razlike između prelomnih tačaka u kojima se menja nagib terena.

$$D_1 = \sqrt{d_1^2 - h_1^2}$$

$$D_2 = \sqrt{d_2^2 - h_2^2}$$

$$D_3 = \sqrt{d_3^2 - h_3^2}$$



8

Merenje dužina poljskom pantljikom

➤ Moguće greške pri merenju dužine pantljikom:

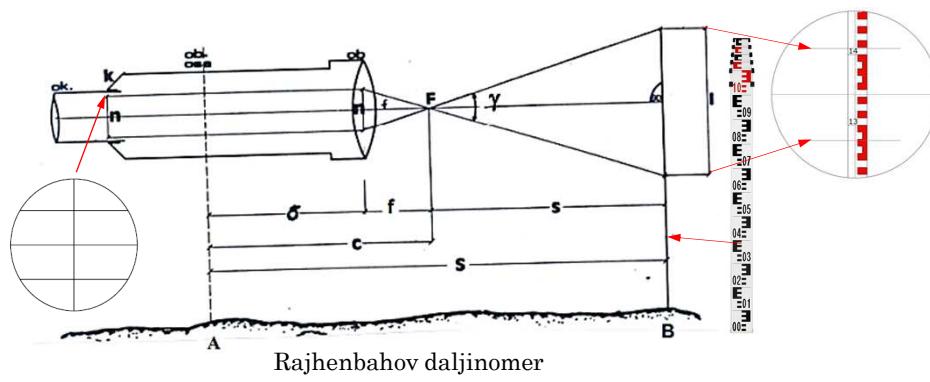
- greška zbog dužine pantljkike;
- greška zbog redukcije;
- greška zbog aliniranja pantljkike (doterivanja pantljkike u pravac merene duži);
- greška zbog temperature;
- greška zbog fiksiranja kraja pantljkike;
- ...

➤ Na primer, dužinu od 100 m, koja se nalazi na ravnom terenu, dakle u gotovo idealnim uslovima, nije moguće izmeriti sa tačnošću većom od ± 5 cm.

9

Optičko merenje dužina

➤ Pojavom teodolita čiji su durbini konstruisani da sadrže končanicu sa tri horizontalna konca koja je na konstantnom rastojanju od alhidadine ose omogućeno je optičko merenje dužina.



10

Rajhenbahov daljinomer

➤ Elementi Rajhenbahovog daljinomera:

ok – okularno sočivo;

ob – objektivno sočivo;

k – končanica;

n – rastojanje između gornje i donje crte končanice.

f – žižna daljina objektivnog sočiva

δ – rastojanje između objektivnog sočiva i obrtne ose durbina;

F – prednja žiža objektivnog sočiva;

l – vrednost odsečka na vertikalnoj letvi (dobija se iz razlike čitanja na letvi gornjom i donjom crtom končanice);

s – rastojanje od prednje žiže objektivnog sočiva do letve;

A i *B* – stanica i vizurna tačka.

11

Rajhenbahov daljinomer

➤ Ugao γ je konstantan i naziva se paralaktični ugao.

➤ Horizontalna dužina od tačke preseka alhidadine i obrtne ose durbina do letve na tački *B* može se odrediti kao:

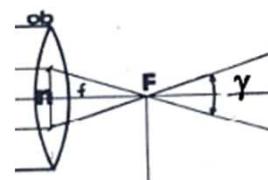
$$S = s + f + \delta = \frac{f}{n} \cdot l + f + \delta, \quad \frac{s}{l} = \frac{f}{n} \Rightarrow s = \frac{f}{n} \cdot l.$$

➤ Budući da su vrednosti rastojanja *f*, *n* i δ konstantne, može se napisati:

$$S = K \cdot l + c,$$

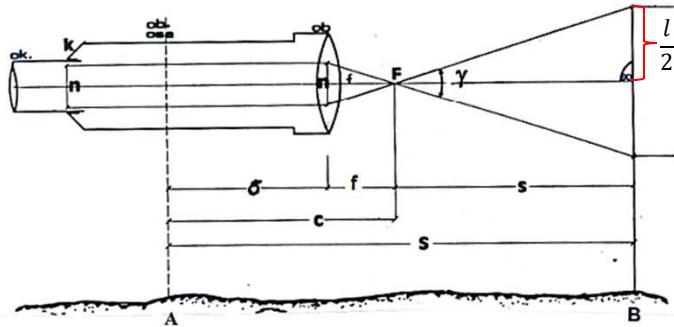
$$K = \frac{f}{n} = \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{2}, \quad c = f + \delta,$$

gde su *K* i *c* multiplikaciona i adicciona konstanta.



12

Rajhenbahov daljinomer



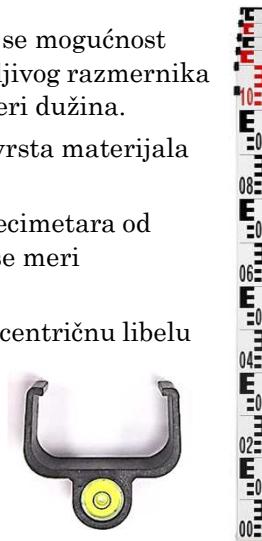
$$S = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma}{2}\right) + f + \delta = K \cdot l + c$$

➤ Kod savremenih instrumenata: $K \rightarrow 100$, $c \rightarrow 0$, $S = 100 \cdot l$.

13

Merenje dužina optičkim daljinomerom pri horizontalnoj vizuri

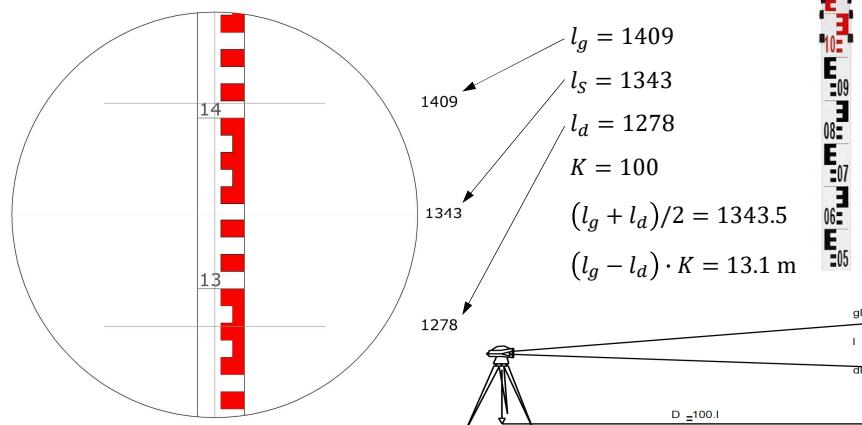
- Pojavom Rajhenbahovih daljinomera otvorila se mogućnost merenja dužina od instrumenta do nekog vidljivog razmernika vertikalno postavljenog na tački do koje se meri dužina.
- Ovaj razmernik koji se izrađuje od različitih vrsta materijala naziva se letva.
- Letva na marginama ima označene brojeve decimetara od nule letve koja se postavlja na tačku do koje se meri rastojanje.
- Letva sa druge strane ima ugrađene držače i centričnu libelu za dovođenje u vertikalu.
- Čitanje podele letve se vrši pomoću crte končanice i to tako što se: čitaju decimetri, odbroje centimetri a unutar centimetara milimetri ocene od oka.



14

Merenje dužina optičkim daljinomerom pri horizontalnoj vizuri

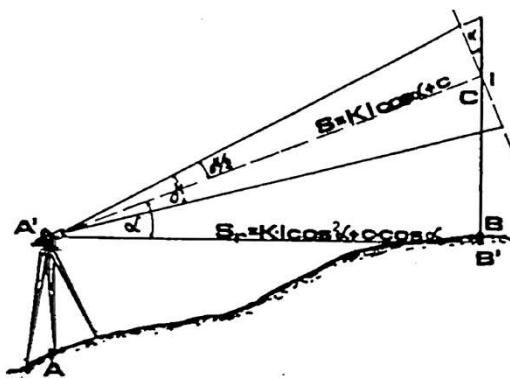
- Merenje se odvija tako, što se sa sva tri konca končanice očita letva i nađe razlika čitanja, a nakon toga odredi dužina.



15

Merenje dužina optičkim daljinomerom pri kosoj vizuri

- Letva na vizurnoj tački B jeste vertikalna ali nije upravna na vizuru.
- Letva sa položajem koji je upravan na vizuru zaklapa ugao α .



16

Merenje dužina optičkim daljinomerom pri kosoj vizuri

➤ Pri kosoj vizuri odsečak na letvi $l = l_g - l_d$ je:

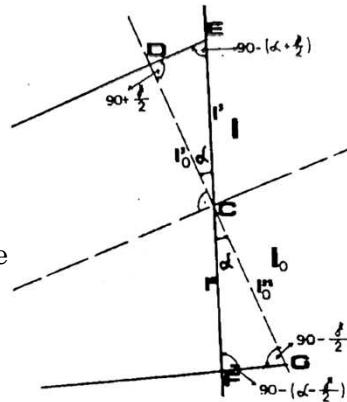
$$EF = l' + l''.$$

➤ Kada bi letva bila upravna na vizuru gornji i donji konac bi odsecali odsečak l_0 :

$$l_0 = DG = l'_0 + l''_0.$$

➤ Odsečak l_0 treba odrediti da bi se prethodno prikazane formule mogle iskoristiti.

$$l_0 = l \cdot \cos(\alpha)$$



17

Merenje dužina optičkim daljinomerom pri kosoj vizuri

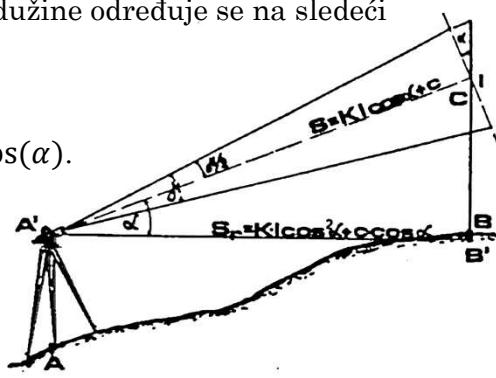
➤ Kada se izraz za određivanje odsečka l_0 uvrsti u prethodno prikazane izraze za određivanje dužine S dobija se:

$$S = K \cdot l_0 + c = K \cdot l \cdot \cos(\alpha) + c.$$

➤ Vrednost horizontalne dužine određuje se na sledeći način:

$$S_r = S \cdot \cos(\alpha),$$

$$S_r = K \cdot l \cdot \cos^2(\alpha) + c \cdot \cos(\alpha).$$



18

Tačnost merenje dužina optičkim daljinomerima

- Maksimalna tačnost optički određene dužine pomoću Rajhenbahovog daljinomera iznosi 1 dm, jer greška procene podele letve od 1 mm pomnožena sa konstantom K koja kod novijih instrumenata iznosi 100, daje grešku dužine od 100 mm, odnosno 1 dm.
- Propisi koji su ovim načinom ograničavali merenje dužina do 120 m.
- Merenje dužina ovom metodom je znatno brže u odnosu na merenje dužina pantljikom.
- Pojavom elektronskih daljinomera optički daljinomeri su skoro u potpunosti istisnuti iz upotrebe.

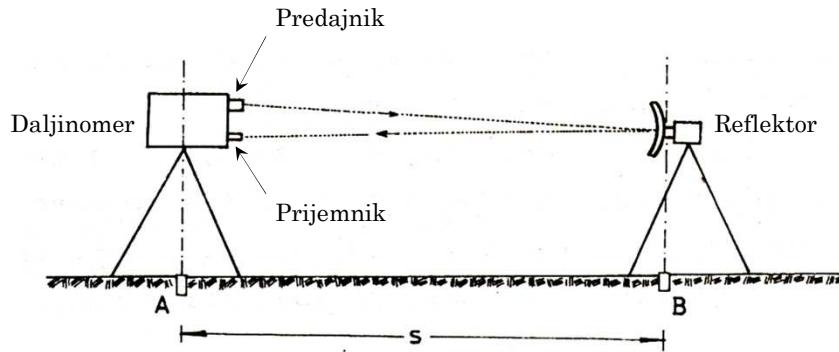
19

Elektronsko merenje dužina

- Elektronski daljinomeri se prema načinu rada mogu podeliti na:
 - impulsne;
 - fazne.
- Elektronski daljinomeri se prema tipu nosećeg signala mogu podeliti na:
 - elektrooptičke – koriste svetlosne i infracrvene talase;
 - mikrotalasne – koriste radio talase.

20

Elektronsko merenje dužina



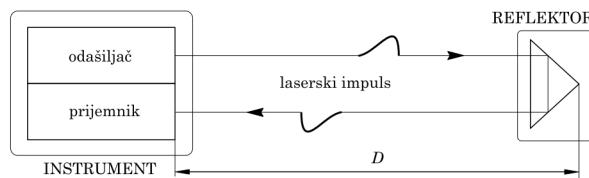
21

Impulsni daljinomeri

- Impulsni metod – predajnik emituje elektromagnetsne oscilacije u obliku vrlo kratkih impulsa, koji se odbijaju od cilja (reflektora) i vraćaju nazad do prijemnika.
- Meri se vreme putovanja impulsa od predajnika do cilja (reflektora) i nazad Δt , na osnovu čega se određuje dužina:

$$D = \frac{\bar{v}}{2} \cdot \Delta t,$$

gde je \bar{v} srednja brzina putovanja talasa duž putanje.



22

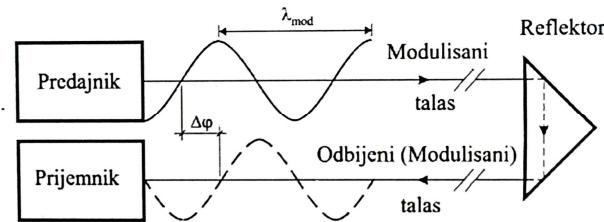
Fazni daljinomeri

➤ Fazni metod zasniva se određivanje fazne razlike $\Delta\varphi$ emitovanog i povratnog signala.

➤ Vrednost dužine određuje se na sledeći način:

$$D = N \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2},$$

gde je λ talasna dužina, $\Delta\varphi$ fazna razlika, a N broj celih talasnih dužina λ .



23

Elektronsko merenje dužina

➤ Sa aspekta upotrebe reflektora pri merenju dužina razlikujemo:

- daljinomere kod kojih upotreba reflektora nezaobilazna;
- daljinomere koji mogu meriti dužine bez upotrebe reflektora.

➤ Daljinomeri koji mere dužinu bez reflektora bazirani su na impulsnoj metodi merenja dužina.

➤ Kod ovih daljinomera u postupku merenja emituju se svetlosni impulsi izrazito visoke energije u poređenju sa faznim daljinomerima.

➤ Usled visoke energije dolazi do većeg reflektovanja signala što omogućava lakše otkrivanje odbijenog signala.

24

Elektronsko merenje dužina

- Elektronski daljinomeri integrисани su u okviru durbina savremenih geodetskih instrumenata koji se nazivaju totalne stanice.
- Reflektori – signali čija je svrha da prime i reflektuju nazad elektromagnetne talase koje su emitovani od strane predajnika elektronskog daljinomera.



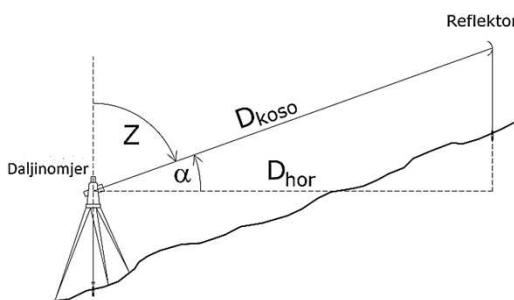
25

Elektronsko merenje dužina

- Kod merenja dužina pomoću elektronskog daljinomera, meri se dužina od prekreta durbina daljinomera, koji je na vertikali iznad jedne tačke (stanica), do centra reflektora, koji je na vertikali iznad druge tačke (vizurna tačka).
- Pored dužine neophodno je izmeriti i zenithni ili vertikalni ugao.

$$D_{hor} = D_{koso} \cdot \cos(\alpha),$$

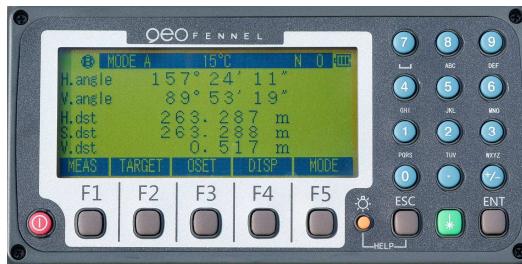
$$D_{hor} = D_{koso} \cdot \sin(Z).$$



26

Elektronsko merenje dužina

- Elektronski daljinomeri imaju veoma visoku tačnost merenja (na nivou milimetra).
- Omogućavaju merenje jako velikih rastojanja (do nekoliko kilometara).
- Veoma brzo merenje dužina, traje svega nekoliko sekundi.
- Očitavanje rezultata se vrši na displeju instrumenta.



27

Ručni laserski daljinomeri

- Merenje dimenzija unutrašnjosti objekata, koje je ranije vršeno sa mnogo komplikacija, pomoću ručnog metra ili pantljike, danas se vrši pomoću malih ručnih laserskih daljinomera.



28

Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

- U različitim vrstama geodetskih radova često se javlja situacija da se određeni ugao ili dužina ne mogu izmeriti na terenu.
- U ovakvim situacijama, za potrebe određivanja ovih veličina formiraju se pomoćni trouglovi u kojima se mere druge stranice ili uglovi.
- Potrebne veličine se određuju indirektno računanjem nepoznatih elemenata u trouglu.
- U postupku računanja nepoznatih elemenata u trouglovima važi generalno pravilo da je nepoznate elemente moguće pronaći ako je poznato, odnosno izmereno, najmanje tri elementa u trouglu, među kojima mora biti najmanje jedna stranica trougla.

29

Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

- Dužina A-C ne može biti izmerena, jer je tačka C nepristupačna.

- Postavi se pomoćna tačka B na pristupačnom mestu i izmeri se dužina A-B i uglovi α i β .

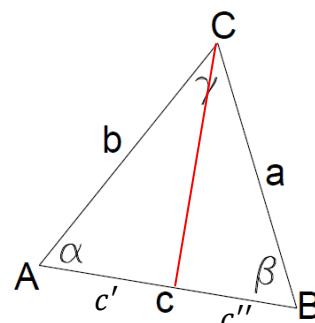
- Nepoznata dužina A-C se računa pomoću sinusne teoreme:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta,$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)},$$

$$b = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\beta),$$

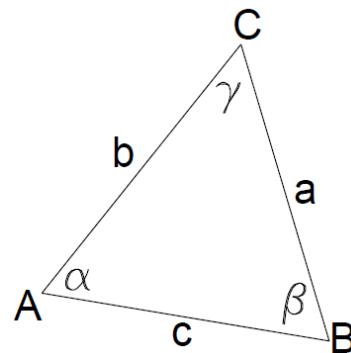
$$a = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha).$$



30

Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

- Dužinu A-B nije moguće izmeriti jer se tačke A i B ne dogledaju.
- Postavi se pomoćna tačka C, a zatim izmere dužine A-C i B-C i ugao γ .
- Nepoznata dužina A-B može se sračunati pomoću:
 - kosinusne teoreme;
 - tangensne teoreme;
 - podelom trougla na dva pravougla trougla.



31

Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

- Određivanje nepoznate dužine A-B pomoću kosinusne teoreme:

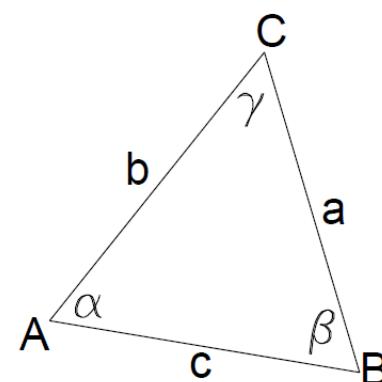
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma),$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)},$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)},$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\gamma)}{c}\right),$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}\right).$$



32

Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

➤ Određivanje nepoznate dužine A-B pomoću tangensne teoreme:

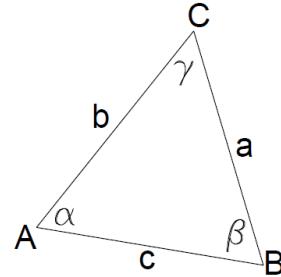
$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma, \quad \frac{\beta+\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = \frac{b-a}{b+a} \cdot \operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\beta = \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad \alpha = \frac{\beta+\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$b = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\beta), \quad a = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha).$$



33

Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

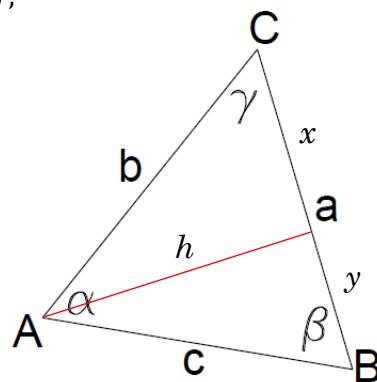
➤ Podela trougla ABC na dva pravougla trougla.

$$h = b \cdot \sin(\gamma), \quad x = b \cdot \cos(\gamma),$$

$$y = a - x, \quad \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{y}\right),$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma,$$

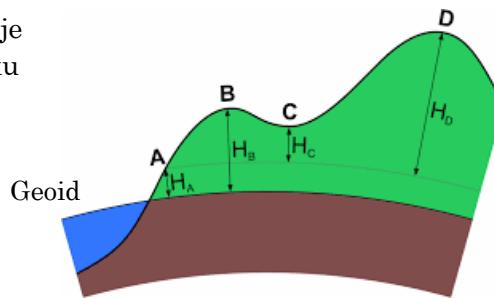
$$c = \sqrt{y^2 + h^2}.$$



34

Apsolutne i relativne visine tačaka

- Nivelman predstavlja skup terenskih i kancelarijskih radova, čiji je krajnji cilj određivanje nadmorskih visina tačaka.
- Visina tačke (kota) može biti absolutna i relativna.
- Apsolutna visina tačke je zapravo nadmorska visina, odnosno rastojanje duž vertikale od geoida do te tačke.
- Relativna visina tačke je visina u odnosu na neku drugu tačku ili ravan.
- Relativna visina je zapravo visinska razlika između dveju tačaka.



35

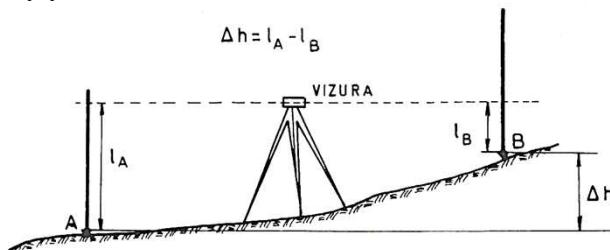
Merenje visinskih razlika

- Visinske razlike mogu se odrediti:
 - geometrijskim nivelmanom;
 - trigonometrijskim nivelmanom;
 - hidrostatičkim nivelmanom;
 - barometrijskim nivelmanom;
 - priručno, pomoću ravnjače i podravnjače;
 - globalnim navigacionim satelitskim sistemom (GNSS) pozicioniranja.

36

Geometrijski nivelman

- Kod geometrijskog nivelmana visinske razlike između dve tačke na fizičkoj površi zemlje određuju se pomoću horizontalne vizure.
- Za određivanje visinskih razlika pri horizontalnoj vizuri koriste se specijalni nivelmanski instrumenti koji se nazivaju NIVELIRI.
- Postupak merenja visinskih razlika naziva se NIVELMAN.
- Na tačkama između koji se određuje visinska razlika postavljaju se nivelmanske letve.

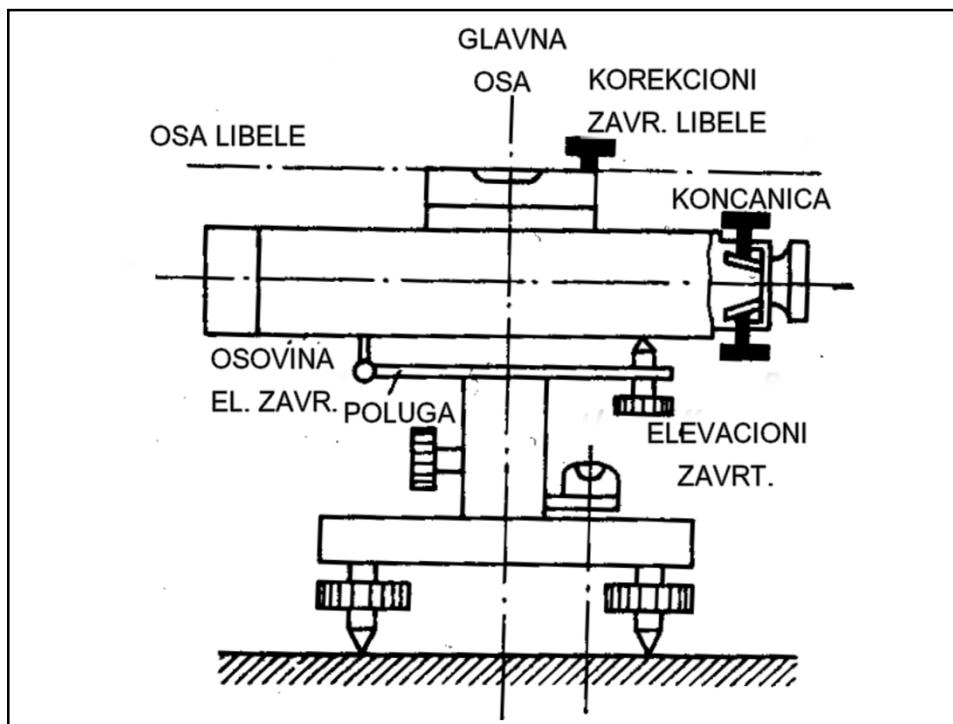


37

Nivelmanski instrument

- Osnovni delovi nivelira su:
 - durbin;
 - cevasta libela.
- Da bi durbin mogao da se rotira horizontalno, povezan je preko svog nosača, sa glavnom osovinom nivelira.
- Glavna osovina nivelira je telo cilindričnog ili konusnog oblika, a prava koja se poklapa sa osom cilindra ili konusa i oko koje se durbin horizontalno rotira, zove se glavna osa.
- Horizontalnost vizure se postiže vezivanjem libele za durbin.

38



39

Nivelmanski instrument



40

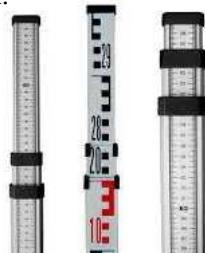
Pribor za geometrijski nivelman

➤ Pri merenju visinskih razlika geometrijskim nivelmanom pored nivelira koristi se sledeći pribor:

- stativ;
- nivelmanske letve;
- nivelmanske papuče;
- gvozdeni klinovi.



Nivelmanska papuča



Nivelmanske letve

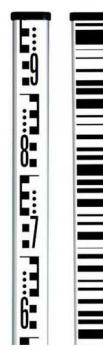


Stativ

41

Savremeni nivelmanski instrumenti

- U današnje vreme na tržištu su najzastupljeniji digitalni niveliri i bar-kod letve.
- Horizontalnost vizure se postiže pomoću kompenzatora.

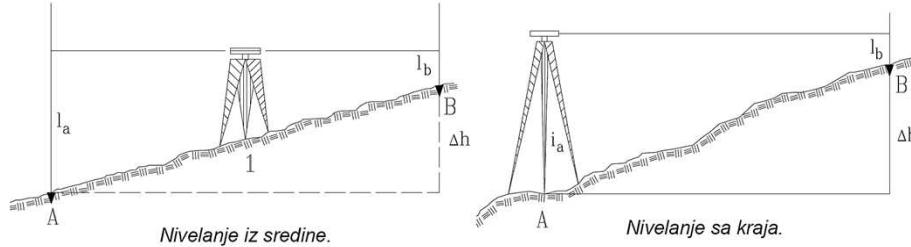


42

Geometrijski nivelman

➤ Prema položaju nivelira u odnosu na tačke između kojih se određuje visinska razlika, razlikujemo:

- nivelanje iz sredine;
- nivelanje sa kraja;



43

Geometrijski nivelman

➤ Postupak merenja visinskih razlika metodom geometrijskog nivelmana iz sredine:

- nivelmanski instrument se postavlja iznad tačke (stanica) koja je podjednako udaljena od tačaka između kojih se određuje visinska razlika;
- na tačkama između kojih se određuje visinska razlika postavljaju se letve u vertikalnom položaju pomoću odgovarajućih libela;
- očitavaju se podele na letvama pri horizontalnoj vizuri.

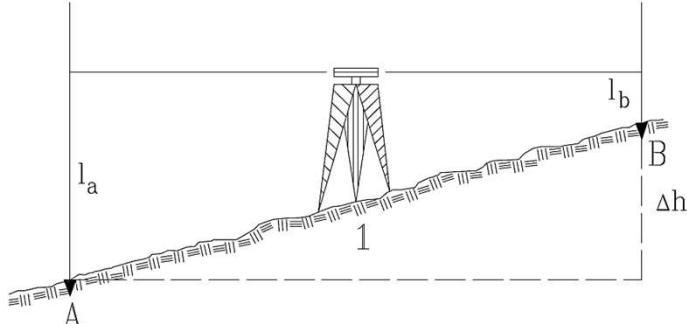
➤ Očitane vrednosti podele na letvama su vertikalna rastojanja od donje ivice letve (početak podele na letvi) do horizontalne ravni koju opisuje vizura nivelira.

44

Geometrijski nivelman

➤ Iz razlike čitanja podela na letvama, po principu zadnja letva minus prednja letva, određuje se visinska razlika:

$$\Delta h_{AB} = l_a - l_b, \text{ odnosno } \Delta h_{BA} = l_b - l_a.$$

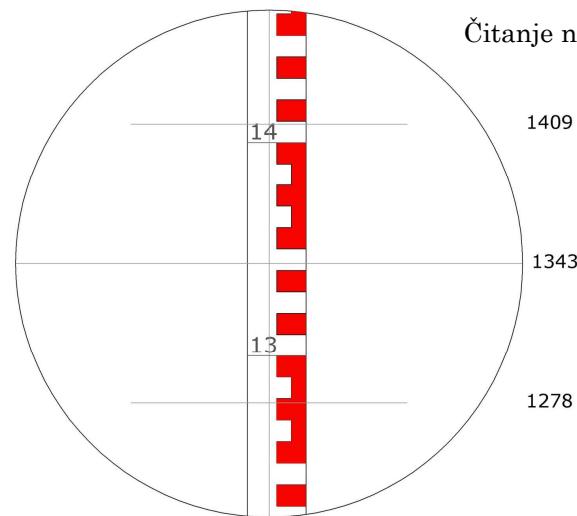


Nivelanje iz sredine.

45

Geometrijski nivelman

Čitanje na letvi: $l = 1,343 \text{ m}$

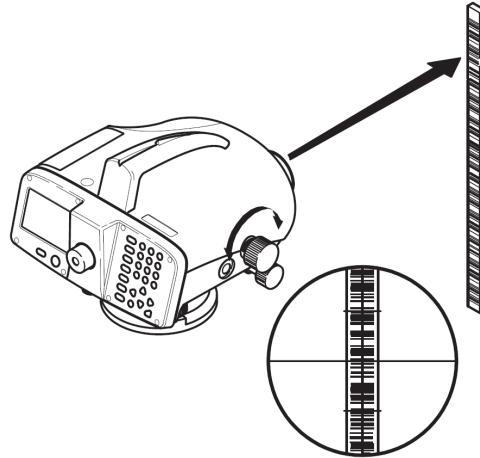


46

Geometrijski nivelman

➤ Očitavanje bar-kod letve pomoću digitalnog nivelira:

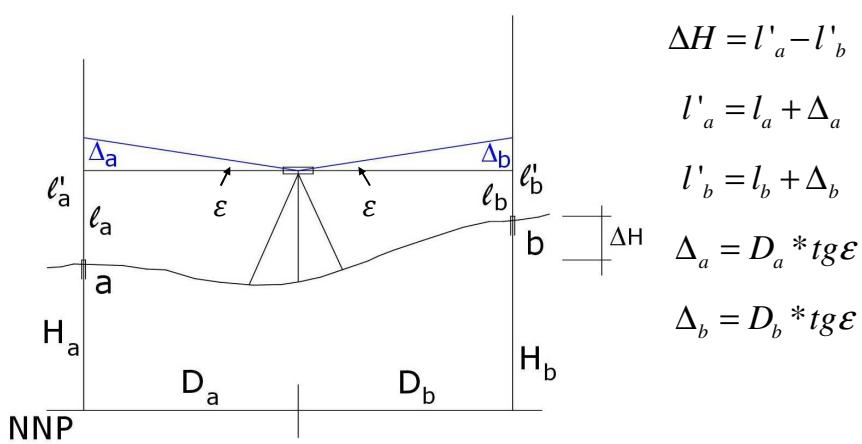
- CCD kamera snimi deo letve koji se upoređuje sa slikom cele letve koja je memorisana u instrumentu.



47

Geometrijski nivelman

➤ Greška zbog nehorizontalnosti vizure.



48

Geometrijski nivelman

- Ukoliko se merenje visinske razlike vrši iz sredine važi sledeće:

$$D_a = D_b \quad \text{i} \quad \Delta_a = \Delta_b,$$

$$\Delta H = l'_a - l'_b = l_a + \Delta_a - l_b - \Delta_b = l_a - l_b.$$

- Ako se visinska razlika meri nivelanjem iz sredine, eventualna nehorizontalnost vizure neće se odraziti na izmerenu visinsku razliku.

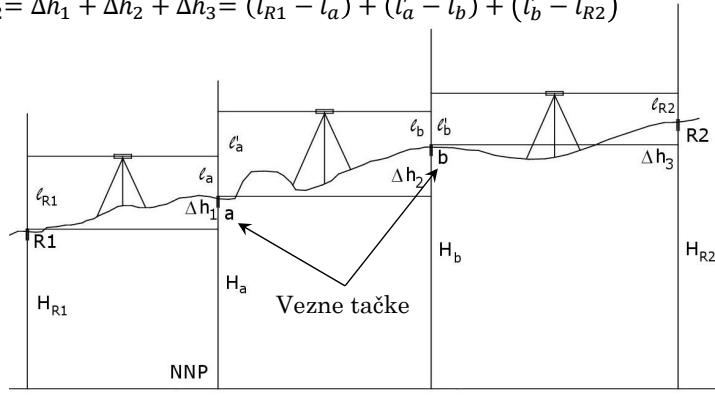
- U zavisnosti od konstrukcije nivelira i nivelmanskih letvi, tačnost merenja visinske razlike je od nekoliko milimetara do nekoliko stotih delova milimetra.

49

Geometrijski nivelman

- Merenje visinskih razlika između tačaka na većem rastojanju.
- Postavljaju se pomoćne tačke, tj. vezne tačke, koje se na terenu materijalizuju nivelmanskim papučama.

$$\Delta h_{R1R2} = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 = (l_{R1} - l_a) + (l'_a - l_b) + (l'_b - l_{R2})$$



50

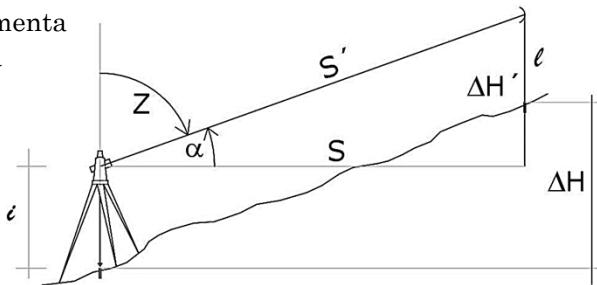
Trigonometrijski nivelman

- U trigonometrijskom nivelmanu visinska razlika između dve tačke određuje se na osnovu izmerenog zenitnog ugla (vertikalnog ugla) i kose dužine.

$$\Delta H' = S' \cdot \cos Z, \quad \Delta H = \Delta H' + i - l$$

$$\Delta H' = S' \cdot \cos Z + i - l$$

i – visina instrumenta
 l – visina signala



51

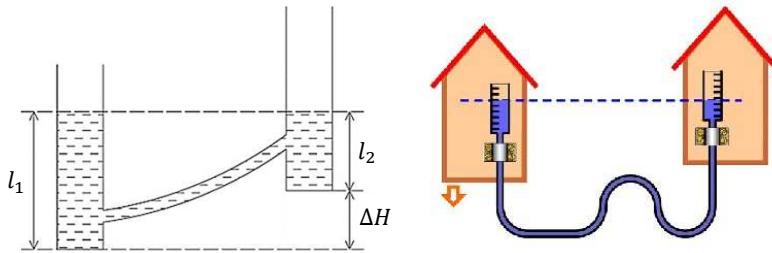
Trigonometrijski nivelman

- Prikazani postupak trigonometrijskog nivelmana se može upotrebiti na kraćim rastojanjima (do 500 m).
- Pri merenju visinskih razlika između tačaka na velikim rastojanjima moraju se uzeti u obzir:
- uticaj zakriviljenosti Zemljine površi;
 - uticaj refrakcije svetlosnog zraka (vizure);
 - uticaj nadmorskih visina krajnjih tačaka.
- Tačnost izmerene visinske razlike, zavisi od tačnosti svih elemenata koji učestvuju u njenom formiranju i kreće se u zavisnosti od rastojanja između tačaka od nekoliko milimetara do nekoliko centimetara.

52

Hidrostatički nivelman

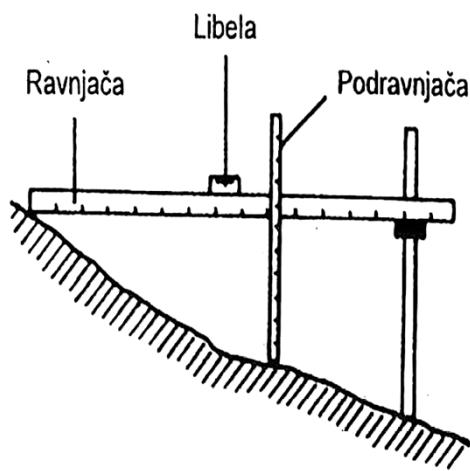
- Hidrostatički nivelman se zasniva na korišćenju pribora koji radi na principu spojenih sudova.
- Dve staklene posude međusobno povezane providnim gumenim crevom koje je napunjeno tečnošću (alkoholom ili destilovanom vodom).
- Prema zakonu spojenih sudova, nivo tečnosti u jednom i drugom sudu je isti.



53

Ravnjača i podravnjača

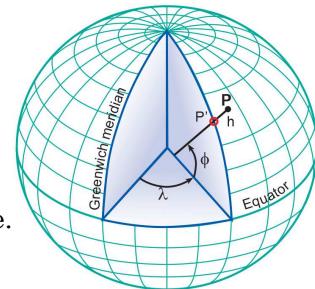
- Ravnjača i podravnjača – par drvenih letvi opremljenih libelama.



54

Merenje visinskih razlika primenom GNSS tehnologije pozicioniranja

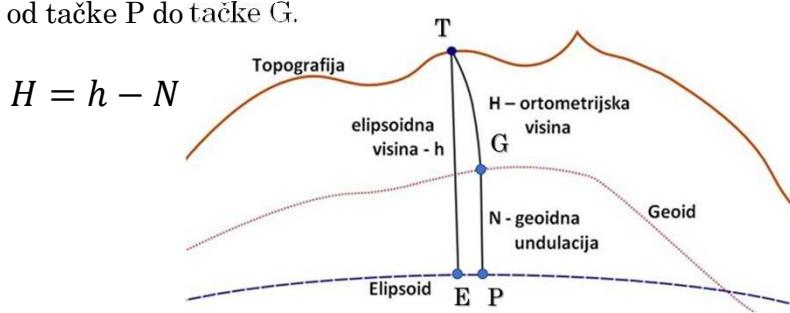
- GNSS sistemom pozicioniranja mogu se odrediti geodetska širina φ , geodetska dužina λ i elipsoidna visina h proizvoljne tačke na površi Zemlje.
- Referenta površ je WGS84 elipsoid.
- U klasičnom geodetskom merenju visinskih razlika i računanju visina kao referentna površ uzima se geoid, odnosno koriste se ortometrijske visine.
- Visine tačaka određene pomoću GNSS sistema moraju se transformisati iz elipsoidnih u ortometrijske visine.



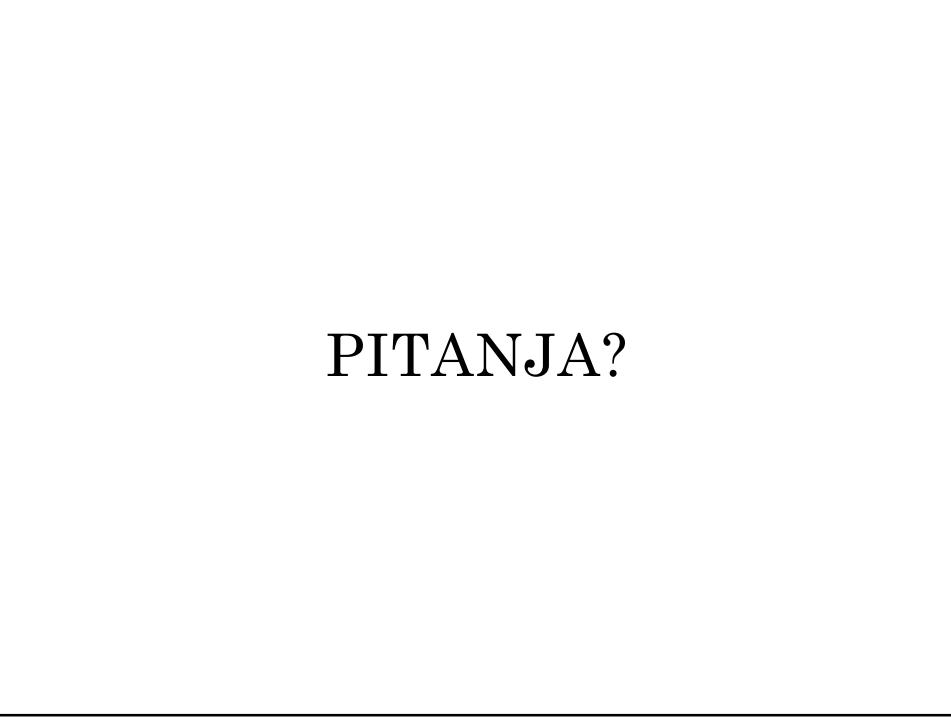
55

Merenje visinskih razlika primenom GNSS tehnologije pozicioniranja

- Elipsoidna visina h – rastojanje duž normale na elipsoid (od tačke E do tačke T).
- Ortometrijska (nadmorska) visina H – rastojanje duž vertikale od tačke G do tačke T.
- Geoidna undulacija N – rastojanje duž normale na elipsoid od tačke P do tačke G.



56



PITANJA?