

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA  
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 2  
- ZADATAK 4 -

NOVI SAD, 2021

# Funkcionalni model posrednog izravnanja

- Funkcionalni model definiše matematičku vezu između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.

Jednačina ravni:

$$Z_i' = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i$$

$$Z_i + V_i = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i$$

Jednačine popravaka:

$$V_i = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i - Z_i$$

$Z_i'$  - izravnata vrednost merene veličine

$Z_i$  - merena veličina (visina)

$\lambda$  - odsečak na  $Z$  osi

$\mu_1, \mu_2$  - koeficijenti pravca po koordinatnim osama

# Funkcionalni i stohastički model

- Funkcionalni model posrednog izravnanja u matričnom obliku:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

Matrica dizajna  $\mathbf{A}$  i vektor slobodnih članova  $\mathbf{f}$  formiraju se na sledeći način:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z}{\partial \mu_1} & \frac{\partial Z}{\partial \mu_2} \\ 1 & -Y_i & -X_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -Y_n & -X_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -Z_i \\ \vdots \\ -Z_n \end{bmatrix}$$

- Stohastički model posrednog izravnanja

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Matrica težina  $\mathbf{P}$  formira se na sledeći način:

$\mathbf{P} = \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}$  – jedinična matrica (sva merenja su homogene tačnosti).

# Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

# Analiza tačnosti

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}}}{n - u}},$$

gde je  $n$  broj merenja, a  $u$  broj nepoznatih parametara.

- Standardne devijacije nepoznatih parametara (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_\lambda = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\lambda\lambda}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_1} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_1\mu_1}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_2} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_2\mu_2}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\lambda\lambda} & Q_{\lambda\mu_1} & Q_{\lambda\mu_2} \\ Q_{\mu_1\lambda} & Q_{\mu_1\mu_1} & Q_{\mu_1\mu_2} \\ Q_{\mu_2\lambda} & Q_{\mu_2\mu_1} & Q_{\mu_2\mu_2} \end{bmatrix}$$

# Primer 1

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu  
*Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 4 - Primer.xlsx.*

Građevinski blok potrebno je visinski urediti pre izgradnje industrijskih objekata, tako da se sa minimalnim radovima na korekciji prirodnog reljefa postigne efikasno odvodnjavanje terena gravitacijom.

$X \backslash Y$	0	10	20
0	100.300	100.005	100.003
10	100.167	100.000	100.600
20	100.170	100.160	100.154

- Matrica dizajna  $\mathbf{A}$ , vektor slobodnih članova  $\mathbf{f}$  i matrica težina  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -20 \\ 1 & -10 & 0 \\ 1 & -10 & -10 \\ 1 & -10 & -20 \\ 1 & -20 & 0 \\ 1 & -20 & -10 \\ 1 & -20 & -20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -100.300 \\ -100.167 \\ -100.170 \\ -100.005 \\ -100.000 \\ -100.160 \\ -100.003 \\ -100.600 \\ -100.154 \end{bmatrix}$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu  
*Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 4 - Primeri.xlsx.*

# Funkcionalni model posrednog izravnanja sa uslovima

- Jednačine popravaka i uslovna jednačina

$$V_i = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i - Z_i$$

$$\lambda - \mu_1 \cdot Y_j - \mu_2 \cdot X_j - Z_j = 0$$

$Y_j, X_j$  - koordinate tačke  $j$  kojom je ravan uslovljena

- Funkcionalni model u matričnom obliku

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

# Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Matrica datumskih uslova  $\mathbf{B}$  i vektor  $\mathbf{w}$  formiraju se na sledeći način:

$$\mathbf{B} = [1 \quad -Y_j \quad -X_j], \quad \mathbf{w} = [-Z_j]$$

- Ocena nepoznatih parametara

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} & (\mathbf{B}^-)^T \\ \mathbf{B}^- & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{k}$  – vektor Lagranžovih multiplikatora

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$



# Analiza tačnosti

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}}}{n - u}}$$

Gde je  $n$  broj merenja, a  $u$  broj nepoznatih parametara.

- Standardne devijacije nepoznatih parametara (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_\lambda = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\lambda\lambda}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_1} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_1\mu_1}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_2} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_2\mu_2}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\lambda\lambda} & Q_{\lambda\mu_1} & Q_{\lambda\mu_2} \\ Q_{\mu_1\lambda} & Q_{\mu_1\mu_1} & Q_{\mu_1\mu_2} \\ Q_{\mu_2\lambda} & Q_{\mu_2\mu_1} & Q_{\mu_2\mu_2} \end{bmatrix}$$

# Primer 2

Građevinski blok potrebno je visinski urediti pre izgradnje industrijskih objekata, tako da se sa minimalnim radovima na korekciji prirodnog reljefa postigne efikasno odvodnjavanje terena gravitacijom.

Ravan je uslovljena tačkom 5 ( $Y = 10, X = 10$ ).

$X \backslash Y$	0	10	20
0	100.300	100.005	100.003
10	100.167	100.000	100.600
20	100.170	100.160	100.154

- Matrica dizajna  $\mathbf{A}$ , vektor slobodnih članova  $\mathbf{f}$ , matrica težina  $\mathbf{P}$ , matrica  $\mathbf{B}$  i vektor  $\mathbf{w}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -20 \\ 1 & -10 & 0 \\ 1 & -10 & -10 \\ 1 & -10 & -20 \\ 1 & -20 & 0 \\ 1 & -20 & -10 \\ 1 & -20 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -100.300 \\ -100.167 \\ -100.170 \\ -100.005 \\ -100.000 \\ -100.160 \\ -100.003 \\ -100.600 \\ -100.154 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [1 \quad -10 \quad -10]$$

$$\mathbf{w} = [-100.000]$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu  
*Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 4 - Primeri.xlsx.*

# Funkcionalni model posrednog izravnanja sa uslovima

- Jednačine popravaka i uslovne jednačine

$$V_i = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i - Z_i$$

$$\lambda - \mu_1 \cdot Y_j - \mu_2 \cdot X_j - Z_j = 0$$

$$\lambda - \mu_1 \cdot Y_k - \mu_2 \cdot X_k - Z_k = 0$$

$Y_j, X_j, Y_k, X_k$  - koordinate tačaka  $j$  i  $k$  kojima je uslovljena ravan

- Funkcionalni model u matičnom obliku

$$\mathbf{V} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{Bx} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

# Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Matrica datumskih uslova  $\mathbf{B}$  i vektor  $\mathbf{w}$  formiraju se na sledeći način:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -Y_j & -X_j \\ 1 & -Y_k & -X_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -Z_j \\ -Z_k \end{bmatrix}$$

- Ocena nepoznatih parametara

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} & (\mathbf{B}^-)^T \\ \mathbf{B}^- & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{k}$  – vektor Lagranžovih multiplikatora

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

# Analiza tačnosti

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}}}{n - u}}$$

Gde je  $n$  broj merenja, a  $u$  broj nepoznatih parametara.

- Standardne devijacije nepoznatih parametara (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_\lambda = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\lambda\lambda}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_1} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_1\mu_1}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_2} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_2\mu_2}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\lambda\lambda} & Q_{\lambda\mu_1} & Q_{\lambda\mu_2} \\ Q_{\mu_1\lambda} & Q_{\mu_1\mu_1} & Q_{\mu_1\mu_2} \\ Q_{\mu_2\lambda} & Q_{\mu_2\mu_1} & Q_{\mu_2\mu_2} \end{bmatrix}$$

# Primer 3

Građevinski blok potrebno je visinski urediti pre izgradnje industrijskih objekata, tako da se sa minimalnim radovima na korekciji prirodnog reljefa postigne efikasno odvodnjavanje terena gravitacijom.

Ravan je uslovljena tačkama 2 ( $Y = 0, X = 10$ ) i 6 ( $Y = 10, X = 20$ ).

$X \backslash Y$	0	10	20
0	100.300	100.005	100.003
10	100.167	100.000	100.600
20	100.170	100.160	100.154

- Matrica dizajna  $\mathbf{A}$ , vektor slobodnih članova  $\mathbf{f}$ , matrica težina  $\mathbf{P}$ , matrica  $\mathbf{B}$  i vektor  $\mathbf{w}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -20 \\ 1 & -10 & 0 \\ 1 & -10 & -10 \\ 1 & -10 & -20 \\ 1 & -20 & 0 \\ 1 & -20 & -10 \\ 1 & -20 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -100.300 \\ -100.167 \\ -100.170 \\ -100.005 \\ -100.000 \\ -100.160 \\ -100.003 \\ -100.600 \\ -100.154 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 1 & -10 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -100.167 \\ -100.160 \end{bmatrix}$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 4 - Primeri.xlsx*.

# ZADATAK 4

- Sračunati elemente koji definišu ravan i parametre tačnosti (na način kao što je prethodno objašnjeno):
  - a) Kada ravan nije uslovljena ni jednom tačkom;
  - b) Kada ravan prolazi kroz jednu tačku;
  - c) Kada ravan prolazi kroz dve tačke.
- Grafički interpretirati dobijene rezultate za sva tri rešenja ( a), b) i c) )

# Primer grafičke interpretacije

		Merene visine		
X\Y	0	10	20	
0	100.300	100.005	100.003	
10	100.167	100.000	100.600	
20	100.170	100.160	100.154	

		Popravke		
X\Y	0	10	20	
0	-0.176	0.139	0.161	
10	-0.014	0.173	-0.407	
20	0.012	0.043	0.069	

		Nove visine		
X\Y	0	10	20	
0	100.124	100.144	100.164	
10	100.153	100.173	100.193	
20	100.182	100.203	100.223	