FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

RAČUN IZRAVNANJA
- VEŽBA 4 -

NOVI SAD, 2024.

Izravnanje po metodi posrednih merenja

- Gaus-Markovljev model izravnanja

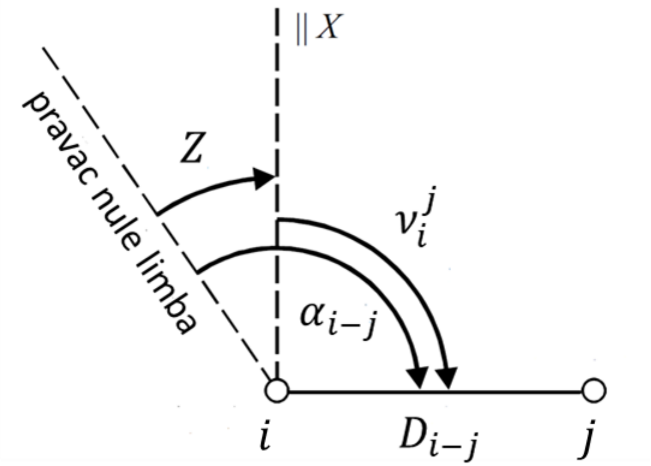
$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$ – funkcionalni model

$\mathbf{P}_l = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ – stohastički model

- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima.

Funkcionalni model

- Funkcije veze



$$\alpha_{i-j} + v_{\alpha_{i-j}} = \arctan\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right) + Z$$ – horizontalni pravci

$$D_{i-j} + v_{D_{i-j}} = \sqrt{(Y_j - Y_i)^2 + (X_j - X_i)^2}$$ – horizontalne dužine

- Funkcije veze linearizuju se razvojem u Tejlorov red u okolini približnih vrednosti nepoznatih parametara, nakon čega se dobijaju jednačine popravaka:

$$v_{\alpha_{i-j}} = a_{ij} \cdot dX_i + b_{ij} \cdot dY_i + a_{ji} \cdot dX_j + b_{ji} \cdot dY_j + dZ + f_{\alpha_{i-j}}$$

$$v_{D_{i-j}} = A_{ij} \cdot dX_i + B_{ij} \cdot dY_i + A_{ji} \cdot dX_j + B_{ji} \cdot dY_j + f_{D_{i-j}}$$

Funkcionalni model

- Slobodni članovi

$$f_{\alpha_{i-j}} = \alpha_{i-j}^{0} - \alpha_{i-j},\ \ \alpha_{i-j}^{0} = \nu_i^j + Z_0,\ \ \nu_i^j = \arctan\left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{X_j^0 - X_i^0}\right)$$

$$f_{D_{i-j}} = D_{i-j}^{0} - D_{i-j},\ \ D_{i-j}^{0} = \sqrt{(Y_j^0 - Y_i^0)^2 + (X_j^0 - X_i^0)^2}$$

$Y_j^0, Y_i^0, X_j^0, X_i^0, Z_0$ - približne vrednosti nepoznatih parametara

- Koeficijenti

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha_{i-j}}{\partial X_i}\right)_0 = \frac{\rho'' \sin \nu_i^j}{D_{i-j}^0}, \qquad b_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha_{i-j}}{\partial Y_i}\right)_0 = -\frac{\rho'' \cos \nu_i^j}{D_{i-j}^0}, \qquad \rho'' = 206265$$

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial D_{i-j}}{\partial X_i}\right)_0 = -\cos \nu_i^j, \qquad B_{ij} = \left(\frac{\partial D_{i-j}}{\partial Y_i}\right)_0 = -\sin \nu_i^j$$

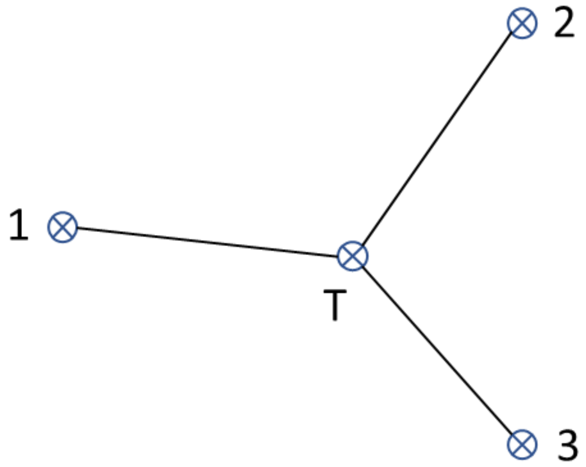
Funkcionalni model

- **Primer 1 – dvodimenzionalna geodetska mreža**

Tačka T(Y, X) određuje se od tačaka 1, 2 i 3 merenjem dužina i pravaca do istih. Standardi merenja su: 2”- za pravce i 3mm + 3mm/km - za dužine. Oceniti koordinate tražene tačke i sračunati elemente apsolutne elipse grešaka.

Date tačke: 1, 2 i 3

Nepoznata tačka: T



Jednačine popravaka:

$$v_{\alpha_{T-1}} = a_{T1} \cdot dX_T + b_{T1} \cdot dY_T + dZ + f_{\alpha_{T-1}}, \quad f_{\alpha_{T-1}} = (\nu_T^1 + Z_0) - \alpha_{T-1}$$

$$v_{\alpha_{T-2}} = a_{T2} \cdot dX_T + b_{T2} \cdot dY_T + dZ + f_{\alpha_{T-2}}, \quad f_{\alpha_{T-2}} = (\nu_T^2 + Z_0) - \alpha_{T-2}$$

$$v_{\alpha_{T-2}} = a_{T3} \cdot dX_T + b_{T3} \cdot dY_T + dZ + f_{\alpha_{T-3}}, \quad f_{\alpha_{T-3}} = (\nu_T^3 + Z_0) - \alpha_{T-3}$$

$$v_{D_{T-1}} = A_{T1} \cdot dX_T + B_{T1} \cdot dY_T + f_{D_{T-1}}, \quad f_{D_{T-1}} = D_{T-1}^0 - D_{T-1}$$

$$v_{D_{T-2}} = A_{T2} \cdot dX_T + B_{T2} \cdot dY_T + f_{D_{T-2}}, \quad f_{D_{T-2}} = D_{T-2}^0 - D_{T-2}$$

$$v_{D_{T-3}} = A_{T3} \cdot dX_T + B_{T3} \cdot dY_T + f_{D_{T-3}}, \quad f_{D_{T-3}} = D_{T-3}^0 - D_{T-3}$$

$$Z_{0,1} = \alpha_{T-1} - \nu_T^1$$

$$Z_{0,2} = \alpha_{T-2} - \nu_T^2$$

$$Z_{0,3} = \alpha_{T-3} - \nu_T^3$$

$$Z_0 = \frac{Z_{0,1} + Z_{0,2} + Z_{0,3}}{3}$$

Funkcionalni model

- **Primer 1 – dvodimenzionalna geodetska mreža**

  Formiranje matrice dizajna $\mathbf{A}$ i vektora slobodnih članova $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{ccc|l} dX_T & dY_T & dZ & \\ \hline a_{T1} & b_{T1} & 1 & \alpha_{T-1} \\ a_{T2} & b_{T2} & 1 & \alpha_{T-2} \\ a_{T3} & b_{T3} & 1 & \alpha_{T-3} \\ A_{T1} & B_{T1} & 0 & D_{T-1} \\ A_{T2} & B_{T2} & 0 & D_{T-2} \\ A_{T3} & B_{T3} & 0 & D_{T-3} \end{array} \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{\alpha_{T-1}} \\ f_{\alpha_{T-2}} \\ f_{\alpha_{T-3}} \\ f_{D_{T-1}} \\ f_{D_{T-2}} \\ f_{D_{T-3}} \end{bmatrix}$$

Napomene:

- Slobodna članove za horizontalne pravce izraziti u sekundama.
- Slobodne članove za dužine izraziti u milimetrima.
- Pri računanju koeficijenata a_{ij} i b_{ij}, dužine D_{i-j}^{0} izraziti u milimetrima.

Stohastički model

- **Primer 1 – dvodimenzionalna geodetska mreža**

Formiranje matrice težina $\mathbf{P}$:

Težine merenja P_i predstavljaju stepen poverenja u rezultate merenja.

Za σ_0 usvojiti vrednost 1!

$$\sigma_{\alpha_{i-j}} = 2''$$

$$\sigma_{D_{T-1}} = 3\ \mathrm{mm} + 3\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{km}} \cdot D^0_{T-1}[\mathrm{km}]$$

$$\sigma_{D_{T-2}} = 3\ \mathrm{mm} + 3\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{km}} \cdot D^0_{T-2}[\mathrm{km}]$$

$$\sigma_{D_{T-3}} = 3\ \mathrm{mm} + 3\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{km}} \cdot D^0_{T-3}[\mathrm{km}]$$

$$P_{\alpha_{T-1}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{\alpha_{T-1}}}, P_{D_{T-1}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{D_{T-1}}}$$

$$P_{\alpha_{T-2}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{\alpha_{T-2}}}, P_{D_{T-2}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{D_{T-2}}}$$

$$P_{\alpha_{T-3}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{\alpha_{T-3}}}, P_{D_{T-3}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{D_{T-3}}}$$

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cccccc} P_{\alpha_{T-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\alpha_{T-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\alpha_{T-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{D_{T-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{D_{T-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{D_{T-3}} \end{array}\right] \begin{array}{c} \alpha_{T-1} \\ \alpha_{T-2} \\ \alpha_{T-3} \\ D_{T-1} \\ D_{T-2} \\ D_{T-3} \end{array}$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 4.xlsx.*

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n},\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:
$\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T\mathbf{P}\mathbf{f} + \mathbf{n}^T\hat{\mathbf{x}}$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{f}$$

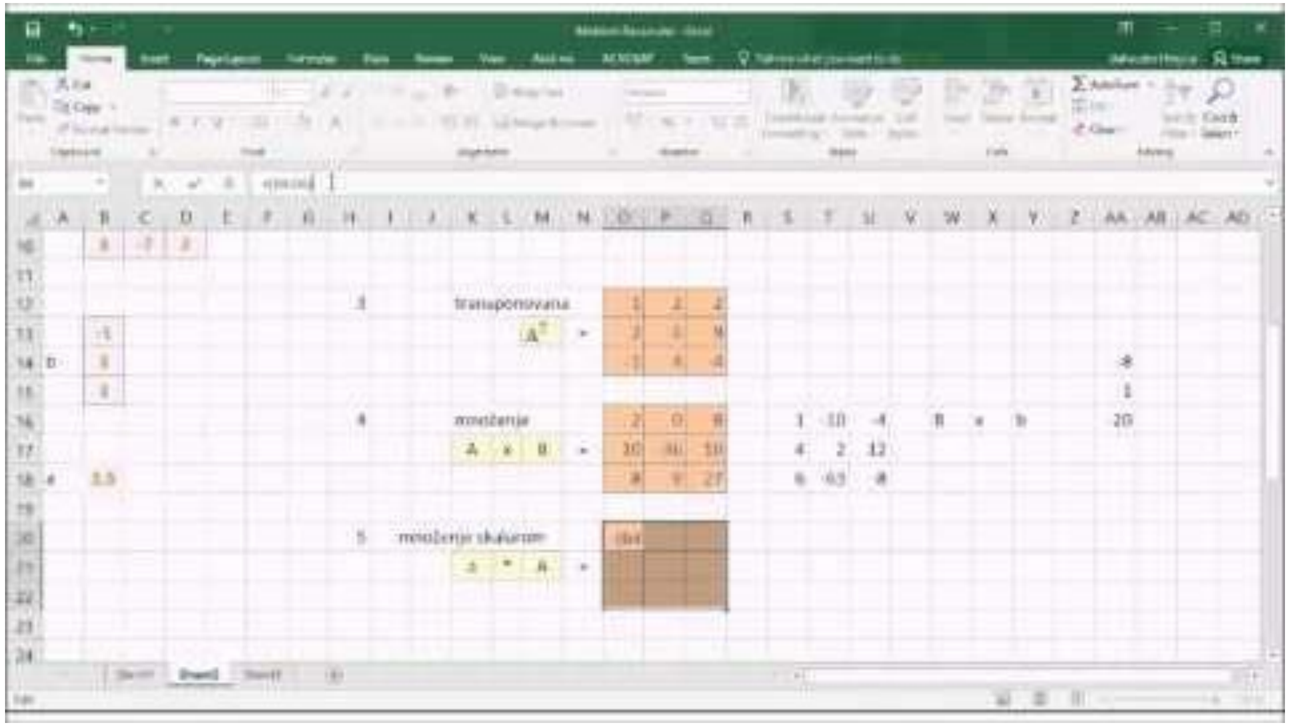
$f = n - u,\ n$ – broj merenja, u – broj nepoznatih parametara

Matrične funkcije u Excelu

- Excel funkcije za rad sa matricama:

MMULT – množenje matrica;
MINVERSE – inverzija matrice;
TRANSPOSE – transponovanje matrice;
MDETERM – determinanta matrice.

Tutorijal – Matrični račun u Excelu



Globlani test na grube greške

- Hipoteze

$H_0 \colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ protiv $H_a \colon \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

pri čemu je $\sigma^2 = M(m_0^2)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,f,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty}$ → **FINV($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{f}$,10000)**

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Data snooping test

- *Data snooping* test se primenjuje ukoliko je primenom globalnog testa utvrđeno da postoje grube greške u merenjima.
- Hipoteze

  $H_0\colon E(\delta_i) = 0$ protiv $H_0\colon E(\delta_i) \neq 0,$

  pri čemu je δ_i gruba greška kojom je opterećeno merenje l_i.
- Test statistika

  $$w_i = \frac{|v_i|}{\sigma_0\sqrt{Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i}}} \sim N(0,1),$$

  gde je v_i popravka i-tog opažanja, σ_0 *a priori* standardna devijacija, $Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i}$ i-ti dijagonalni element kofaktorske matrice popravaka $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$ i N standardizovana normalna raspodela.

$$\boxed{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T}$$

Data snooping test

- Ukoliko je $w_i \geq N_{1-\alpha/2}$, merenje l_i opterećeno je grubom greškom. Sa druge strane, ako je $w_i < N_{1-\alpha/2}$, merenje l_i nije opterećeno grubom greškom.

Excel: $N_{1-\alpha/2} \rightarrow$ **NORMINV($\mathbf{1-(\alpha/2)}$),0,1)**

- Kada je više merenja opterećeno grubom greškom, merenje sa najvećom vrednošću test statistike w_i proglašava se grubom greškom i odbacuje iz merenja.
- Postupak izravnanja se ciklično ponavlja sve dok se sva merenja sa grubim greškama ne identifikuju i odbace.

Defintivna kontrola izravnanja

Izravnate koordinate:

$$\hat{Y}_i = Y_i^0 + dY_i$$

$$\hat{X}_i = X_i^0 + dX_i$$

$$\hat{Z} = Z_0 + dZ$$

Merene veličine iz izravnatih koordinata:

$$\hat{\alpha}_{i-j} = \hat{v}_i^j + \hat{Z}, \qquad \hat{v}_i^j = \arctan\left(\frac{\hat{Y}_j - \hat{Y}_i}{\hat{X}_j - \hat{X}_i}\right)$$

$$\hat{D}_{i-j} = \sqrt{(\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2 + (\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2}$$

Kontrola izravnanja:

$$u_{\alpha_{i-j}} = \hat{\alpha}_{i-j} - \alpha_{i-j}$$

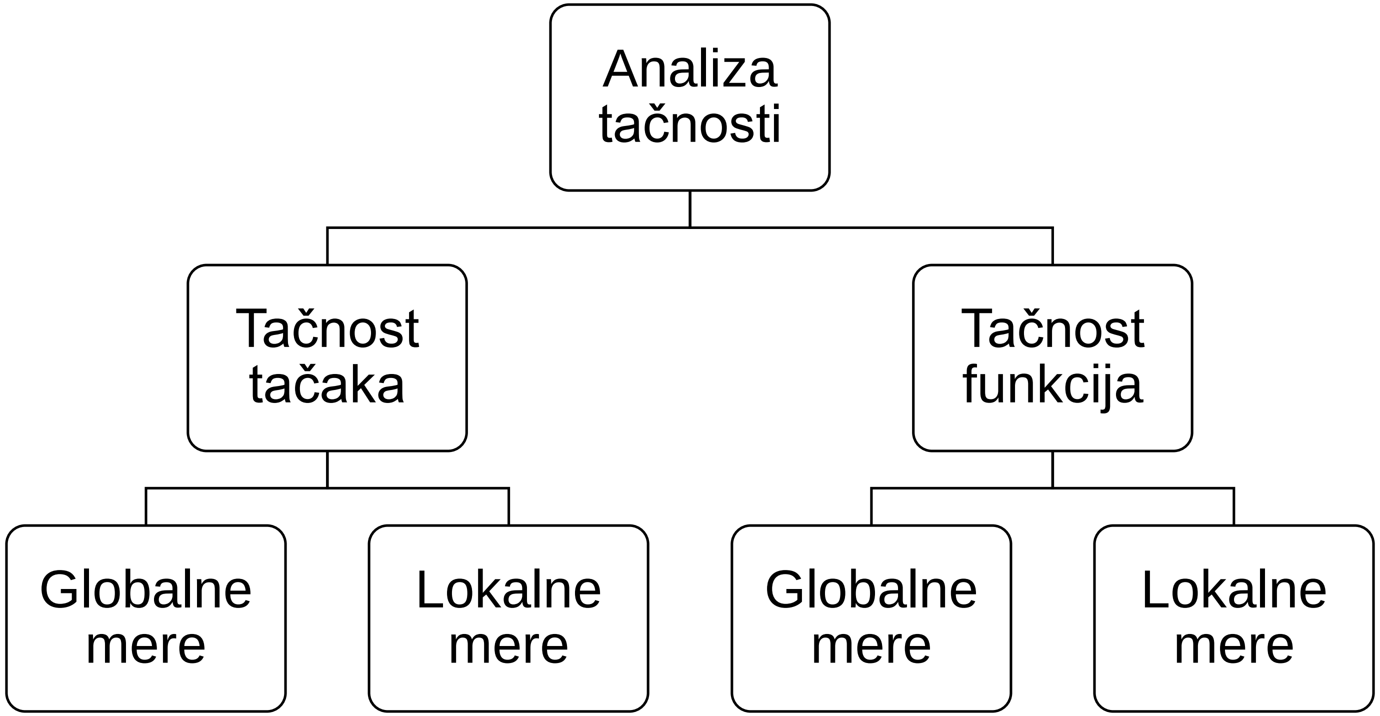
$$u_{D_{i-j}} = \hat{D}_{i-j} - D_{i-j}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\alpha_{i-j}} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{D_{i-j}} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Na ovaj način se kontrolišu sve moguće greške u postupku izravnanja.

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Ocena tačnosti može biti globalna ako se određuje jedna vrednost kao reprezent za ceo skup veličina u geodetskoj mreži ili lokalna ocena tačnosti ako se ona odnosi na pojedine veličine.



Analiza tačnosti

Tačnost tačaka

Tačnost funkcija

Globalne mere

Lokalne mere

Globalne mere

Lokalne mere

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

$$m_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f}},$$

pri čemu je $f = n - u$ broj stepeni slobode.

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{Y}_1\hat{Y}_1} & Q_{\hat{Y}_1\hat{X}_1} & \cdots & \cdots \\ Q_{\hat{X}_1\hat{Y}_1} & Q_{\hat{X}_1\hat{X}_1} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & Q_{\hat{Y}_m\hat{Y}_m} & Q_{\hat{Y}_m\hat{X}_m} \\ \cdots & \cdots & Q_{\hat{X}_m\hat{Y}_m} & Q_{\hat{X}_m\hat{X}_m} \end{bmatrix}$$

- Standardne devijacije koordinata tačaka (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_{Y_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}}, \quad \hat{\sigma}_{X_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i}},$$

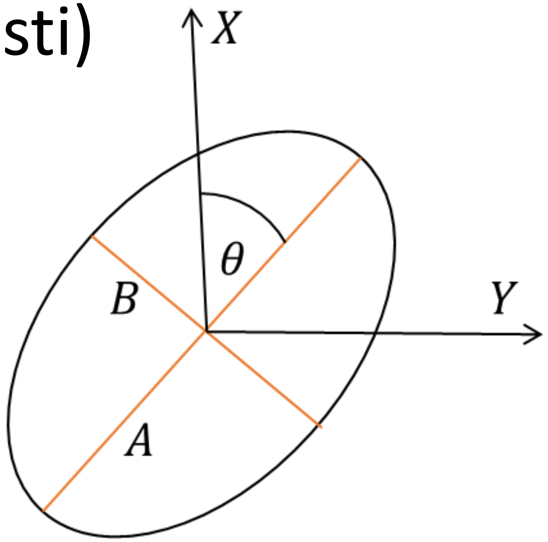
pri čemu su $Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}$, $Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i}$ dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$.

- Standardne devijacije položaja tačaka (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_{P_i} = \sqrt{\hat{\sigma}_{Y_i}^2 + \hat{\sigma}_{X_i}^2}$$

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Elementi apsolutnih elipsi grešaka (lokalne mere tačnosti)



$$\lambda_{1,i} = \frac{1}{2}(Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} + Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i} + k), \quad \lambda_{2,i} = \frac{1}{2}(Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} + Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i} - k),$$

$$k = \sqrt{(Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} - Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i})^2 + 4Q^2_{\hat{X}_i\hat{Y}_i}}$$

$$A_i = m_0\sqrt{\lambda_{1,i} \cdot \chi^2_{1-\alpha,f}}, \quad B_i = m_0\sqrt{\lambda_{2,i} \cdot \chi^2_{1-\alpha,f}},$$

$\chi^2_{1-\alpha,f}$ - kvantil χ^2 raspodele za nivo značajnosti α i broj stepeni slobode f
Za α usvojiti vrednost 0.05, broj stepeni slobode f iznosi 2 jer kod 2D mreža tačke imaju dve koord.
$\chi^2_{0.95,2} = 5.99$, za $\alpha = 0.05$ i $f = 2$.

Excel: $\chi^2_{1-\alpha,f}$ → **CHIINV(α, f)**

Analiza tačnosti geodetskih mreža

$$\theta_i = \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{2Q_{\hat{X}_i\hat{Y}_i}}{Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} - Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}}\right) + KV\right)$$

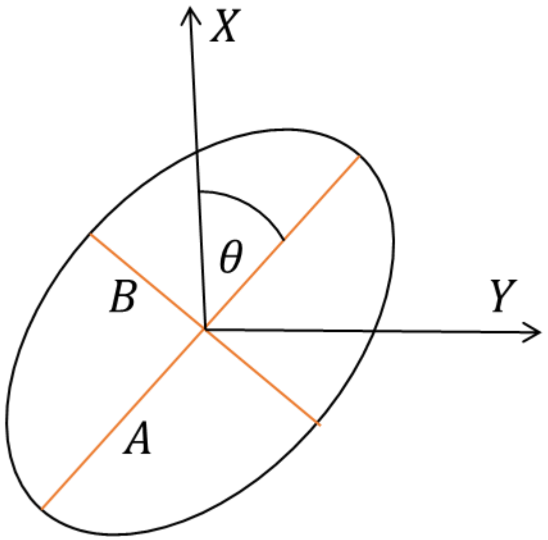
Primer:

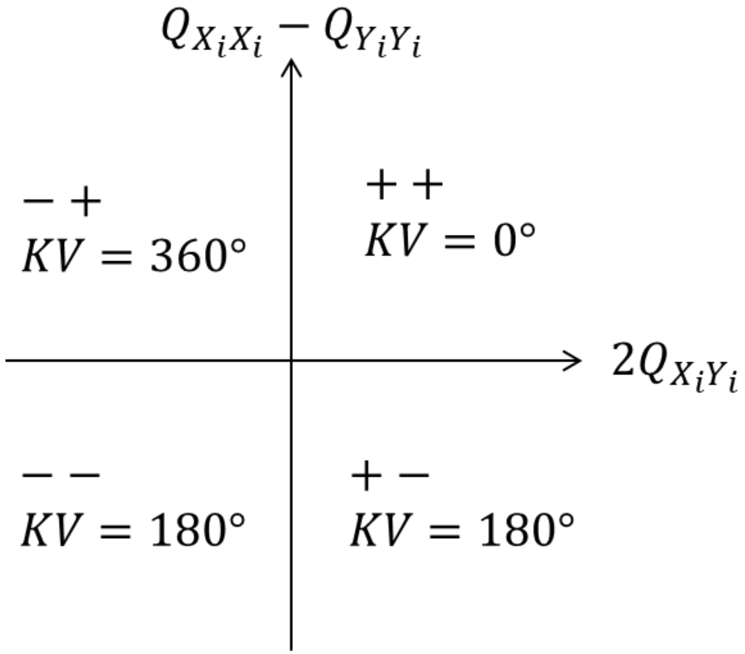
$2Q_{\hat{X}_i\hat{Y}_i} = -2$

$Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} - Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i} = -2$

$KV = 180°$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{-2}{-2}\right) + KV\right) = \frac{1}{2}(45° + 180°)$$





$- \; +$
$KV = 360°$

$+ \; +$
$KV = 0°$

$- \; -$
$KV = 180°$

$+ \; -$
$KV = 180°$

Funkcionalni model

- Jednačine popravaka – visinske razlike (geometrijski nivelman)

$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \Delta h_{i-j} + v_{\Delta h_{i-j}}$ (1)

$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \hat{H}_j - \hat{H}_i$ (2)

Na osnovu izraza (1) i (2) može se napisati:

$v_{\Delta h_{i-j}} = \left(\hat{H}_j - \ \hat{H}_i\right) - \Delta h_{i-j}$, $\hat{H}_j = H_j^0 + dH_j$ i $\hat{H}_i = H_i^0 + dH_i$,

$v_{\Delta h_{i-j}} = H_j^0 + dH_j - H_i^0 - dH_i - \Delta h_{i-j}$,

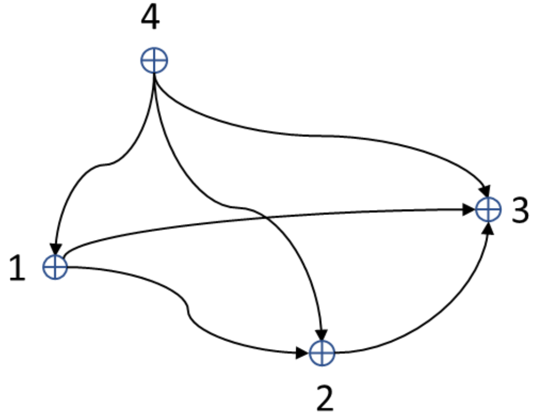
a onda:

$v_{\Delta h_{i-j}} = dH_j - dH_i + f_{\Delta h_{i-j}}$, $f_{\Delta h_{i-j}} = \left(H_j^0 - H_i^0\right) - \Delta h_{i-j}$.

Funkcionalni model

- **Primer 2 – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Na osnovu prikupljenih merenja izravnati slobodnu geodetsku mrežu geometrijskog nivelmana po metodi posrednih merenja. Za kotu repera 1 usvojiti vrednost 100 m.



Približne visine repera:

Usvajamo $H_1 = 100 \text{ m}$, reper 1 smatra se datim.

$$H_2^0 = H_1 + \Delta h_{1-2}, \;\; H_3^0 = H_1 + \Delta h_{1-3}, \;\; H_4^0 = H_1 - \Delta h_{4-1}$$

Jednačine popravaka:

$$v_{\Delta h_{1-2}} = dH_2 + f_{\Delta h_{1-2}}, \;\; f_{\Delta h_{1-2}} = (H_2^0 - H_1) - \Delta h_{1-2}$$

$$v_{\Delta h_{2-3}} = dH_3 - dH_2 + f_{\Delta h_{2-3}}, \;\; f_{\Delta h_{2-3}} = (H_3^0 - H_2^0) - \Delta h_{2-3}$$

$$v_{\Delta h_{1-3}} = dH_3 + f_{\Delta h_{1-3}}, \;\; f_{\Delta h_{1-3}} = (H_3^0 - H_1) - \Delta h_{1-3}$$

$$v_{\Delta h_{4-1}} = -dH_4 + f_{\Delta h_{4-1}}, \;\; f_{\Delta h_{4-1}} = (H_1 - H_4^0) - \Delta h_{4-1}$$

$$v_{\Delta h_{4-2}} = dH_2 - dH_4 + f_{\Delta h_{4-2}}, \;\; f_{\Delta h_{4-2}} = (H_2^0 - H_4^0) - \Delta h_{4-2}$$

$$v_{\Delta h_{4-3}} = dH_3 - dH_4 + f_{\Delta h_{4-3}}, \;\; f_{\Delta h_{4-3}} = (H_3^0 - H_4^0) - \Delta h_{4-3}$$

Funkcionalni model

- **Primer 2 – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Formiranje matrice dizajna $\mathbf{A}$ i vektora slobodnih članova $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} dH_2 & dH_3 & dH_4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} v_{\Delta h_{1-2}} \\ v_{\Delta h_{2-3}} \\ v_{\Delta h_{1-3}} \\ v_{\Delta h_{4-1}} \\ v_{\Delta h_{4-2}} \\ v_{\Delta h_{4-3}} \end{array} \end{array} \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{\Delta h_{1-2}} \\ f_{\Delta h_{2-3}} \\ f_{\Delta h_{1-3}} \\ f_{\Delta h_{4-1}} \\ f_{\Delta h_{4-2}} \\ f_{\Delta h_{4-3}} \end{bmatrix}$$

Napomena:

- Slobodna članove $f_{\Delta h_{i-j}}$ izraziti u milimetrima.

Stohastički model

- **Primer 2 – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Formiranje matrice težina:

$$P_{\Delta h_{i-j}} = \frac{1}{n_{i-j}},$$

n_{i-j} – broj stanica.

$$P_{\Delta h_{1-2}} = \frac{1}{n_{1-2}} \quad P_{\Delta h_{4-1}} = \frac{1}{n_{4-1}}$$

$$P_{\Delta h_{2-3}} = \frac{1}{n_{2-3}} \quad P_{\Delta h_{4-2}} = \frac{1}{n_{4-2}}$$

$$P_{\Delta h_{1-3}} = \frac{1}{n_{1-3}} \quad P_{\Delta h_{4-3}} = \frac{1}{n_{4-3}}$$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} P_{\Delta h_{1-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\Delta h_{2-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\Delta h_{1-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-3}} \end{matrix}\right] \end{array} \begin{array}{l} \Delta h_{1-2} \\ \Delta h_{2-3} \\ \Delta h_{1-3} \\ \Delta h_{4-1} \\ \Delta h_{4-2} \\ \Delta h_{4-3} \end{array}$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Račun izravnanja - Vežba 4.xlsx*.

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n},\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$$
$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:
$\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T\mathbf{P}\mathbf{f} + \mathbf{n}^T\hat{\mathbf{x}}$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{f}$$

$f = n - u$, n – broj merenja, u – broj nepoznatih parametara

Globlani test na grube greške

- Hipoteze

$H_0 \colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ protiv $H_a \colon \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

pri čemu je $\sigma^2 = M(m_0^2)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,f,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty}$ → **FINV($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{f}$,10000)**

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Defintivna kontrola izravnanja

Izravnate kote repera:

$$\widehat{H}_i = H_i^0 + dH_i$$

Merene veličine iz izravnatih kota repera:

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \widehat{H}_j - \widehat{H}_i$$

Kontrola izravnanja:

$$u_{\Delta h_{i-j}} = \widehat{\Delta h}_{i-j} - \Delta h_{i-j}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\Delta h_{i-j}} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Na ovaj način se kontrolišu sve moguće greške u postupku izravnanja.

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

  $$m_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f}},$$

  pri čemu je $f = n - u$ broj stepeni slobode.

- Standardne devijacije visina repera (lokalne mere tačnosti)

  $$\hat{\sigma}_{H_i} = m_0 \sqrt{Q_{\widehat{H}_i}}$$

  σ_0 - *a priori* standardna devijacija

  $Q_{\widehat{H}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\widehat{H}_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & Q_{\widehat{H}_m} \end{bmatrix}$$