FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 2
- ZADATAK 6 -

NOVI SAD, 2021

Kontrola geometrije objekata

- Kontrola geometrije se vrši radi dokazivanja (ne)podudarnosti materijalizovanog objekta sa njegovim projektom.
- Geodetskim metodama merenja osmatrani objekat se diskretizuje i zamenjuje skupom tačaka čije se koordinate u procesu kontrole podudarnosti koriste za ocenu parametara modela geometrijske figure.
- Geometrijsku figuru čini skup tačaka povezanih uglovima i dužinama.

Prostorni odnosi geometrijskih elemenata

- Tačka ili skup tačaka može pripadati pravoj ili krivoj liniji, ravni ili površi.
- Prava ili ravan može biti horizontalna, vertikalna ili nagnuta.
- Dve prave ili dve ravni mogu biti paralelne, upravne ili mogu da se seku pod uglom.

Šta znači testiranje podudarnosti realizovane geometrije sa projektom

- Testiranje predstavlja statističku proveru jednakosti karakterističnih elemenata realizovane geometrije sa odgovarajućim elementima projektovane figure, pa tako razlikujemo test po:
  - Obliku (upoređivanje uglovnih elemenata);
  - Obliku i veličini (upoređivanje uglovnih i linearnih elemenata);
  - Položaju (upoređivanje koordinata).

Kako testirati podudarnost?

- Za test podudarnosti potrebno je formirati r nezavisnih linearnih jednačina čime se stvara funkcionalna veza između elemenata figure (dužina i uglova) i izravnatih koordinata tačaka.
- Broj jednačina jednak je broju nezavisnih elemenata potrebnih i dovoljnih da bi figura bila jednoznačno određena.
- Nelinearne jednačine je potrebno linearizovati razvojem u Tejlorov red.

Broj potrebnih i dovoljnih nezavisnih elemenata

- Broj nezavisnih elemenata r koji su potrebni i dovoljni da bi figura koju čini m tačaka bila određena u k - dimenzionalnom koordinatnom sistemu prikazan je u narednoj tabeli.

Koordinatni sistem	Vrsta određenosti geometrijske figure		
	Po obliku	Po obliku i veličini	Po položaju
1D ($k = 1$)	$k \cdot m - 2 = m - 2$	$k \cdot m - 1 = m - 1$	$k \cdot m = m$
2D ($k = 2$)	$k \cdot m - 4 = 2m - 4$	$k \cdot m - 3 = 2m - 3$	$k \cdot m = 2m$
3D ($k = 3$)	$k \cdot m - 7 = 3m - 7$	$k \cdot m - 6 = 3m - 6$	$k \cdot m = 3m$

Opšti oblik linearnih hipoteza

- Hipoteze

$$H_0 \colon \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w} \quad \text{protiv} \quad H_a \colon \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{w}$$

$\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$ – vektor vrednosti m linearnih funkcija

$\mathbf{w}$ – vektor poznatih vrednosti (konstanti)

$\mathbf{d} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}$ – vektor odstupanja od hipoteze

$\mathbf{Q_d} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{H}^T, \mathbf{K_d} = m_0^2\mathbf{Q_d}$

- Test statistika

$$T = \frac{\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{-1}\mathbf{d}}{k \cdot m_0^2} \sim F_{1-\alpha,k,f}\Big|_{H_0} \quad \text{ili} \quad T = \frac{\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{-1}\mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,k,\infty}\Big|_{H_0},$$

gde je $k = r(\mathbf{H})$ rang matrice $\mathbf{H}$.

$F_{1-\alpha,k,\infty}$ – kvantil Fišerove raspodele za nivo značajnosti α i brojeve stepeni slobode k i f (∞)

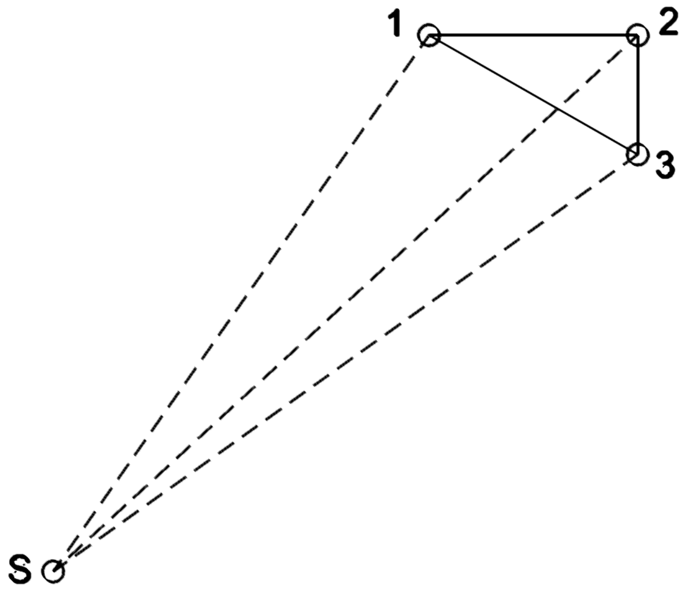
Testiranje hipoteze da li je figura pravougli trougao

Za koordinate tačke S usvojiti sledeće vrednosti $Y_s = 1000\ \mathrm{m}$ i $X_s = 1000\ \mathrm{m}$.

Na osnovu merenih dužina i orijentisanih pravaca računaju se koordinate tačaka 1, 2 i 3, prema sledećim izrazima:

$$Y_i = Y_s + D_{s-i} \cdot \sin\varphi_s^i$$

$$X_i = X_s + D_{s-i} \cdot \cos\varphi_s^i$$



Testiranje hipoteze da li je figura pravougli trougao

- Na osnovu prethodno navedenih funkcija veze i standardnih devijacija orijentisanih pravaca i horizontalnih dužina (σ_φ i σ_D), na bazi zakona prenosa grešaka formira se kovarijaciona matrica koordinata tačaka 1, 2 i 3.

- Budući da su navedene funkcije veze nelinearne, neophodno ih je linearizovati razvojem u Tejlorov red. Shodno tome, računaju se sledeći koeficijenti:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \varphi_s^i} = D_{s-i} \cdot \cos\varphi_s^i \cdot \frac{1}{\rho''}, \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial D_{s-i}} = \sin\varphi_s^i\,,$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial \varphi_s^i} = -D_{s-i} \cdot \sin\varphi_s^i \cdot \frac{1}{\rho''}, \qquad \frac{\partial X_i}{\partial D_{s-i}} = \cos\varphi_s^i\,.$$

Napomena: Pri računanju ovih koeficijenata dužine D_{s-i} potrebno je izraziti u milimetrima.

Testiranje hipoteze da li je figura pravougli trougao

- Na osnovu prethodno navedenih koeficijenata formiraju se sledeće matrice:

$$\mathbf{h}_{X_1}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \varphi_s^1} & \frac{\partial X_1}{\partial D_{s-1}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{h}_{Y_1}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial \varphi_s^1} & \frac{\partial Y_1}{\partial D_{s-1}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h}_{X_2}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial \varphi_s^2} & \frac{\partial X_2}{\partial D_{s-2}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{h}_{Y_2}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_2}{\partial \varphi_s^2} & \frac{\partial Y_2}{\partial D_{s-2}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h}_{X_3}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_3}{\partial \varphi_s^3} & \frac{\partial X_3}{\partial D_{s-3}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{h}_{Y_3}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_3}{\partial \varphi_s^3} & \frac{\partial Y_3}{\partial D_{s-3}} \end{bmatrix},$$

a onda:

$$\left.\begin{aligned} K_{Y_iY_i} &= \mathbf{h}_{Y_i}^T \cdot \mathbf{K}_l \cdot \mathbf{h}_{Y_i}, \\ K_{X_iX_i} &= \mathbf{h}_{X_i}^T \cdot \mathbf{K}_l \cdot \mathbf{h}_{X_i}, \\ K_{Y_iX_i} &= \mathbf{h}_{Y_i}^T \cdot \mathbf{K}_l \cdot \mathbf{h}_{X_i}, \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

gde je $\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} \sigma_\varphi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_D^2 \end{bmatrix}$.

Kovarijaciona matrica:

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} K_{Y_1Y_1} & K_{Y_1X_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{X_1Y_1} & K_{X_1X_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{Y_2Y_2} & K_{Y_2X_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{X_2Y_2} & K_{X_2X_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{Y_3Y_3} & K_{Y_3X_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{X_3Y_3} & K_{X_3X_3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \;\Rightarrow\; \sigma_0 = 1}$$

Testiranje hipoteze da li je figura pravougli trougao

- Hipoteze

$H_0: M(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ protiv $H_a: M(\mathbf{d}) \neq \mathbf{0}$ $\qquad \mathbf{d} = \left[\nu_2^1 - \nu_2^3 - 90\,°\right] \leftarrow f$

- Test statistika

$$\mathbf{H} = \left[\frac{\partial f}{\partial \hat{Y}_1} \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{X}_1} \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{Y}_2} \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{X}_2} \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{Y}_3} \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{X}_3}\right], \mathbf{H} = [b_{12} \quad a_{12} \quad (b_{21} - b_{23}) \quad (a_{21} - a_{23}) \quad -b_{32} \quad -a_{32}]$$

$$\mathbf{Q_d} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{H}^T, k = r(\mathbf{H})$$

$$T = \frac{\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{-1}\mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,k,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty} \rightarrow$ **FINV(α, k,100000)**

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,k,\infty}$, nulta hipoteza H_0 se ne odbacuje, tj. trougao jeste pravougli. Sa druge strane, ako je $T \geq F_{1-\alpha,k,\infty}$, nulta hipoteza H_0 se odbacuje, tj. trougao nije pravougli.

Napomena: Razliku $\nu_2^1 - \nu_2^3 - 90°$ izraziti u sekundama.

Testiranje hipoteze da li je figura pravougli trougao sa katetama a i b

- Hipoteze

$$H_0 : M(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad \text{protiv} \quad H_a : M(\mathbf{d}) \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \nu_2^1 - \nu_2^3 - 90\,^\circ \\ D_{12} - a \\ D_{23} - b \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \leftarrow f_3 \end{matrix}$$

- Formiranje matrice $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} b_{12} & a_{12} & (b_{21} - b_{23}) & (a_{21} - a_{23}) & -b_{32} & -a_{32} \\ B_{12} & A_{12} & B_{21} & A_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} & A_{23} & B_{32} & A_{32} \end{bmatrix}$$

Testiranje hipoteze da li je figura pravougli trougao sa katetama a i b

- Test statistika

$$\mathbf{Q_d} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{H}^T, k = r(\mathbf{H})$$

$$T = \frac{\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{-1}\mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,k,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty}$ $\rightarrow$ **FINV($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{k}$,100000)**

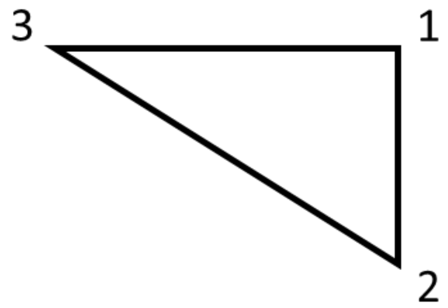
Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,k,\infty}$, nulta hipoteza H_0 se ne odbacuje, tj. trougao jeste pravougli sa katetama *a* i *b*. Sa druge strane, ako je $T \geq F_{1-\alpha,k,\infty}$, nulta hipoteza H_0 se odbacuje, tj. trougao nije pravougli sa katetama *a* i *b*.

Napomena: Elemente vektora $\mathbf{d}$ izraziti u milimetrima i sekundama.

Primer

Sa stanice S mereni su orijentisani pravci i horizontalne dužine prema tačkama 1, 2 i 3. Standard merenja orijentisanih pravac iznosi $\sigma_{\varphi} = 5''$, a horizontalnih dužina $\sigma_D = 2\ \mathrm{mm}$. Rezultati merenja dostupni su narednoj tabeli.

Stanica	**Vizura**	φ_S^i			$D_{S-i}[\mathrm{m}]$
		o	'	''	
S	1	131	5	58	106.968
S	2	134	54	3	119.954
S	3	141	4	40	97.840



a) Ispitati da li je figura 1, 2, 3 pravougli trougao.

b) Ispitati da li je figura 1, 2, 3 pravougli trougao sa katetama 15 m i 20 m.

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 6 - Primer.xlsx.*