FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 3
- VEŽBA 2 -

NOVI SAD, 2021

Posredno izravnanje slobodnih geodetskih mreža

- Gaus-Markovljev model izravnanja

  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$ – funkcionalni model

  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ – stohastički model

- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima.

Funkcionalni model

- Jednačine popravaka

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \Delta h_{i-j} + v_{\Delta h_{i-j}} \qquad (1)$$

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \widehat{H}_j - \widehat{H}_i \qquad (2)$$

Na osnovu izraza (1) i (2) može se napisati:

$$v_{\Delta h_{i-j}} = \left(\widehat{H}_j - \widehat{H}_i\right) - \Delta h_{i-j},\ \widehat{H}_j = H_j^0 + dH_j \text{ i } \widehat{H}_i = H_i^0 + dH_i,$$

$$v_{\Delta h_{i-j}} = H_j^0 + dH_j - H_i^0 - dH_i - \Delta h_{i-j},$$

a onda:

$$v_{\Delta h_{i-j}} = dH_j - dH_i + f_{\Delta h_{i-j}},\ \ f_{\Delta h_{i-j}} = \left(H_j^0 - H_i^0\right) - \Delta h_{i-j}.$$

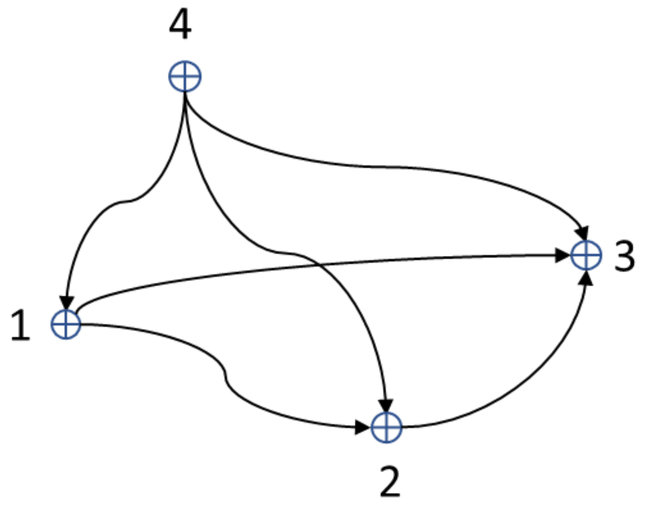
Funkcionalni model

- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

U svrhu monitoringa pomeranja i deformacija inženjerskog objekta uspostavljena je jednodimenzionalna geodetska mreža. Merenja u mreži realizuju se metodom geometrijskog nivelmana u zatvorenim nivelmanskim vlakovima.

Izravnati slobodnu geodetsku mrežu po funkcionalnom i stohastičkom modelu posrednog izravnanja. Datum definisati:

a) na klasičan način reperom 1;
b) minimalnim tragom kofaktorske matrice na sve repere mreže.



Jednačine popravaka:

$$v_{\Delta h_{1-2}} = dH_2 - dH_1 + f_{\Delta h_{1-2}}, \quad f_{\Delta h_{1-2}} = \left(H_2^0 - H_1^0\right) - \Delta h_{1-2}$$

$$v_{\Delta h_{2-3}} = dH_3 - dH_2 + f_{\Delta h_{2-3}}, \quad f_{\Delta h_{2-3}} = \left(H_3^0 - H_2^0\right) - \Delta h_{2-3}$$

$$\vdots$$

$$v_{\Delta h_{4-3}} = dH_3 - dH_4 + f_{\Delta h_{4-3}}, \quad f_{\Delta h_{4-3}} = \left(H_3^0 - H_4^0\right) - \Delta h_{4-3}$$

Formiranje matrice dizajna:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 \end{array} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_{\Delta h_{1-2}} \\ v_{\Delta h_{2-3}} \\ v_{\Delta h_{1-3}} \\ v_{\Delta h_{4-1}} \\ v_{\Delta h_{4-2}} \\ v_{\Delta h_{4-3}} \end{array} \end{array}$$

Formiranje vektora slobodnih članova:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{\Delta h_{1-2}} \\ f_{\Delta h_{2-3}} \\ f_{\Delta h_{1-3}} \\ f_{\Delta h_{4-1}} \\ f_{\Delta h_{4-2}} \\ f_{\Delta h_{4-3}} \end{bmatrix}$$

Stohastički model

- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Računanje standardnih devijacija visinskih razlika:

$$\sigma_{\Delta h_{i-j}} = S_{i-j}[\mathrm{km}] \cdot \sigma_{\Delta h}$$

S_{i-j} - dužina nivelmanske strane

$\sigma_{\Delta h}[\mathrm{ppm}]$ - standard merenja instrumenta

Homogenizacija težina:

$$P_{\Delta h_{i-j}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{i-j}}^2}$$

Za σ_0 usvojiti vrednost **1**!

$$P_{\Delta h_{1-2}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{1-2}}^2}, \ldots, P_{\Delta h_{4-3}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{4-3}}^2}$$

Homogenizacija težina:

$$P_{\Delta h_{i-j}} = \frac{1}{S_{i-j}}$$

S_{i-j} - dužina nivelmanske strane

$$P_{\Delta h_{1-2}} = \frac{1}{S_{1-2}}, \ldots, P_{\Delta h_{4-3}} = \frac{1}{S_{4-3}}$$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} P_{\Delta h_{1-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\Delta h_{2-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\Delta h_{1-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-3}} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \Delta h_{1-2} \\ \Delta h_{2-3} \\ \Delta h_{1-3} \\ \Delta h_{4-1} \\ \Delta h_{4-2} \\ \Delta h_{4-3} \end{array} \end{array}$$

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Kod slobodnih geodetskih mreža matrica dizajna $\mathbf{A}$ ima nepotpun rang $r(\mathbf{A}) = r < u$, tj. broj njenih linearno nezavisnih kolona je manji od broja nepoznatih parametara u. U tom slučaju matrica koeficijenata normalnih jednačina $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$ je singularna, jer je $\det(\mathbf{N}) = 0$.
- Veličina $d = u - r$ predstavlja defekt datuma geodetske mreže. Defekt datuma geodetske mreže jeste broj nedostajućih datumskih parametara.
- Datum geodetske mreže čine parametri koji definišu koordinatni sistem, odnosno parametri koji su neophodni za definisanje geodetske mreže po obliku, položaju i veličini.
- Defekt datuma geodetske mreže zavisi od vrste merenih veličina u geodetskoj mreži.

Model geodetske mreže	Merene veličine	Defekt $d = u - r$	Datumski parametri
1D	Visinske razlike	1	Translacija po H osi

Klasičan način definisanja datuma geodetske mreže

- Kod klasičnog načina definisanja datuma fiksira se neophodan (minimalan) broj koordinata tačaka/repera mreže.
- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Defekt datuma geodetske mreže je 1, pa je neophodno fiksirati visinu jednog od repera mreže. Fiksiramo visinu H_1 repera 1.

Matrica datumskih uslova:

$$\mathbf{R}^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^- & \mathbf{R}^- \\ (\mathbf{R}^-)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^-$$

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Kod ovog načina definisanja datuma sve datumske tačke imaju jednak doprinos definiciji datuma geodetske mreže.
- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Matrica datumskih uslova formira se na sledeći način:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 \end{array} \\ \mathbf{B}^T = & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \end{array}$$

m – broj repera mreže koji učestvuju u definiciji datuma

Kontrola računanja:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{E},$$

gde je $\mathbf{E}$ jedinična matrica.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^+ & \mathbf{B}^+ \\ (\mathbf{B}^+)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$ ili $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^-$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:
$\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T\mathbf{P}\mathbf{f} + \mathbf{n}^T\hat{\mathbf{x}}$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{f}$$

$f = n - u + d$, n – broj merenja, u – broj nepoznatih parametara,
d – defekt datuma mreže

Globlani test na grube greške

- Hipoteze

$H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ protiv $H_a\colon \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

pri čemu je $\sigma^2 = M\left(m_0^2\right)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,f,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty}$ → **FINV(α, f,10000)**

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Definitivna kontrola izravnanja

Izravnate kote repera:

$$\hat{H}_i = H_i^0 + dH_i$$

Merene veličine iz izravnatih kota repera:

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \hat{H}_j - \hat{H}_i$$

Kontrola izravnanja:

$$u_{\Delta h_{i-j}} = \widehat{\Delta h}_{i-j} - \Delta h_{i-j}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\Delta h_{i-j}} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Na ovaj način se kontrolišu sve moguće greške u postupku izravnanja.

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

  $$m_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f}},$$

  pri čemu je $f = n - u + d$ broj stepeni slobode.

- Standardne devijacije visina repera (lokalne mere tačnosti)

  $$\hat{\sigma}_{H_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{H}_i}}$$

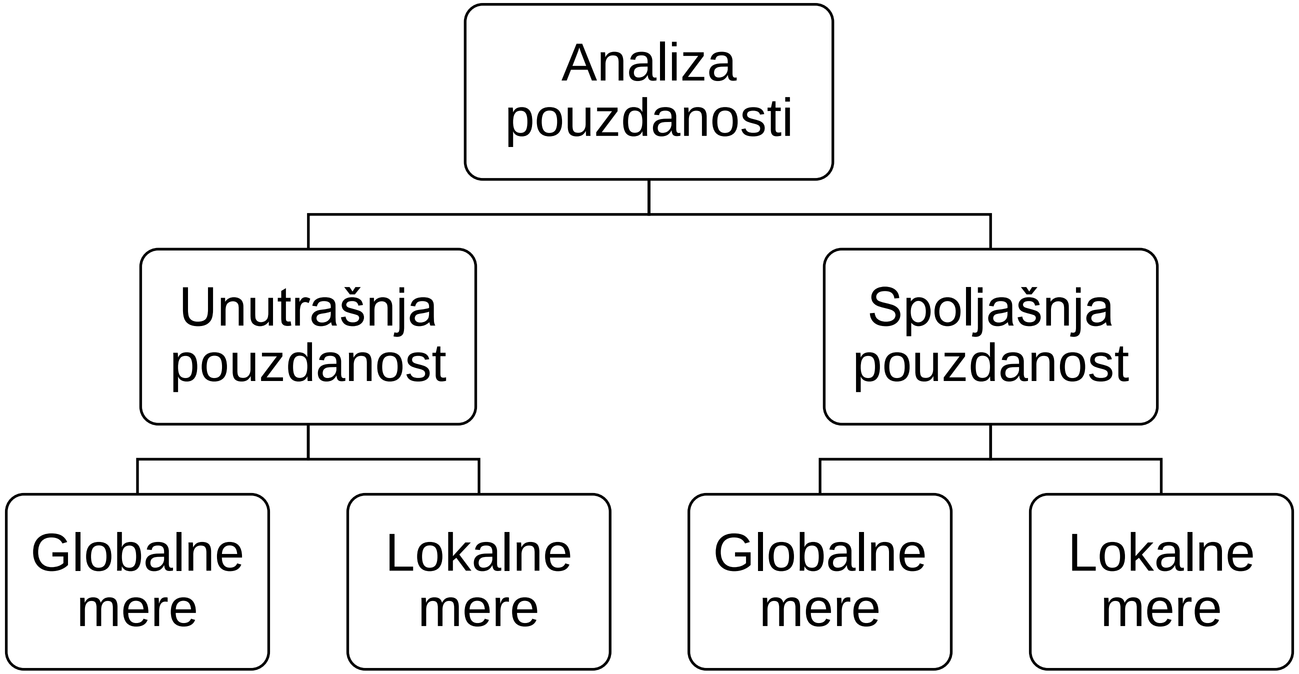
  σ_0 - *a priori* standardna devijacija

  $Q_{\hat{H}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{H}_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & Q_{\hat{H}_m} \end{bmatrix}$$

Analiza pouzdanosti geodetskih mreža

- Pouzdanost geodetske mreže predstavlja kvalitet predloženog rešenja sa aspekta mogućnosti otkrivanja grubih grešaka u merenjima (unutrašnja pouzdanost), i sa aspekta uticaja neotkrivenih grubih grešaka na ocene traženih veličina (spoljašnja pouzdanost).



Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- Koeficijenti unutrašnje pouzdanosti

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T$ – kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}$ – kofaktorska matrica popravaka merenih veličina

$r_i = Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i} \cdot P_i$

$Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i}$ – i-ti dijagonalni element matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$

P_i – i-ti dijagonalni element matrice težina $\mathbf{P}$

Kontrola:

$$\sum ri = f,$$

$f = n - u + d$ – broj stepeni slobode.

Koeficijent r_i predstavlja uticaj grube greške i-tog opažanja na i-tu popravku.
Verovatnoća otkrivanja grube greške je veća ukoliko je koeficijent r_i veći.
$r_i < 0.3$ – nepouzdano merenje, $r_i \geq 0.3$ – pouzdano merenje

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- **Marginalna gruba greška koja se može otkriti *Data snooping* testom**

$G_i = \frac{\sigma_0 \sqrt{\lambda_0}}{P_i \sqrt{Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i}}}$, $\sqrt{\lambda_0}$ - parametar necentralnosti

$\sqrt{\lambda_0} = t_{1-\beta_0} + t_{1-\alpha_0/2}$

$t_{1-\beta_0}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojenu moć testa

$t_{1-\alpha_0/2}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojeni nivo značajnosti

$\sqrt{\lambda_0} = 0.842 + 1.96 = \mathbf{2.802}$, za $1 - \beta_0 = 0.80$ i $\alpha_0 = 0.05$.

Marginalna greška G_i predstavlja vrednost grube greške koja se može otkriti *Data snooping* testom, pod pretpostavkom postojanja samo jedne grube greške.

Ocenjivanje funkcija nepoznatih parametara

- U slobodnim geodetskih mrežama, generalizovana inverzija matrice koeficijenata normalnih jednačina zavisna je od izbora datuma, pa je i ocena vektora priraštaja nepoznatih parametara zavisna od izbora datuma. Međutim, u geodetskim mrežama postoje funkcije koje su invarijantne od izbora datuma koje se nazivaju **ocenjive funkcije**.
- Potreban i dovoljan uslov ocenjivosti:

$\mathbf{h}^T = \mathbf{h}^T\mathbf{N}^-\mathbf{N}$ – za klasično definisan datum

$\mathbf{h}^T = \mathbf{h}^T\mathbf{N}^+\mathbf{N}$ – za datum definisan minimalnim tragom

$$\mathbf{h}^T = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)_0 \left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial F}{\partial X_u}\right)_0\right]$$

Funkcije za koje su ove jednakosti ispunjene su ocenjive, dok su ostale funkcije neocenjive.

Ocenjivanje funkcija nepoznatih parametara

- Standardne devijacije ocenjivih funkcija u geodetskoj mreži određuju se na sledeći način:

$$\hat{\sigma}_F = \sigma_0 \sqrt{\mathbf{h}^T \mathbf{N}^- \mathbf{h}}$$

$$\hat{\sigma}_F = \sigma_0 \sqrt{\mathbf{h}^T \mathbf{N}^+ \mathbf{h}}$$

S transformacija

- S transformacija je linearna transformacija koja omogućava datumsku transformaciju vektora $\hat{\mathbf{x}}$ i kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ bez ponovnog izravnanja geodetske mreže.

$$\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{S}\tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{S}\mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{x}}}\boldsymbol{S}^{T}$$

gde je:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} - \mathbf{G}\left(\mathbf{G}^{T}\mathbf{W}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^{T}\mathbf{W}$$

$\mathbf{E}$ – jedinična matrica

$\mathbf{W}$ – dijagonalna matrica pomoću koje se specificira koje tačke učestvuju u definiciji datuma.

$\mathbf{G}$ – matrica datumskih uslova