FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

UVOD U DEFORMACIONA MERENJA I ANALIZU
- VEŽBA 1 -

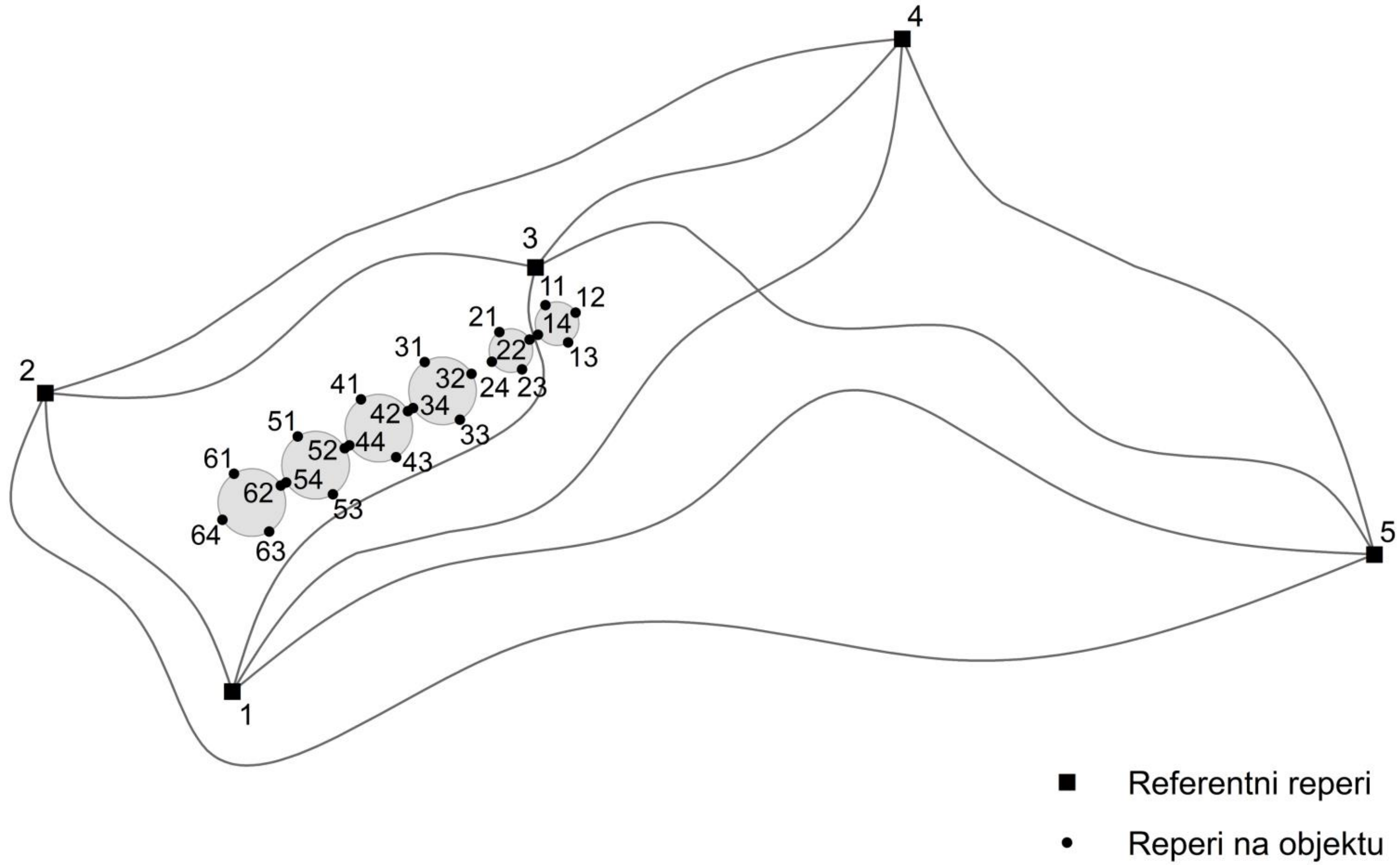
NOVI SAD, 2024

Geodetski monitoring pomeranja i deformacija inženjerskih objekata i delova površi Zemljine kore

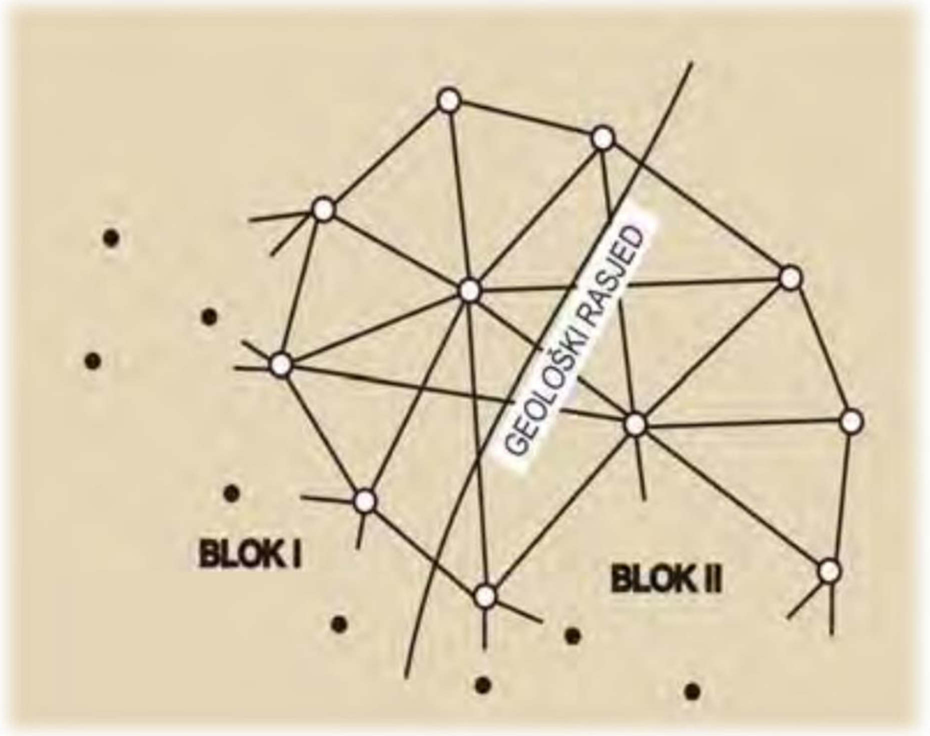
- U svrhu monitoringa pomeranja i deformacija složenih inženjerskih objekata i delova površi Zemljine kore uspostavljaju se geodetske mreže.
- Informacije o pomeranja i deformacija dobijaju se na osnovu ponovljenih merenja.
- Geodetske monitoring mreže mogu se podeliti na:
    - Apsolutne geodetske mreže;
    - Relativne geodetske mreže.

Geodetski monitoring pomeranja i deformacija inženjerskih objekata i delova površi Zemljine kore

Apsolutna geodetska mreža



Relativna geodetska mreža



Deformaciona analiza geodetskih mreža

- Deformaciona analiza je naučna disciplina koja se bavi proučavanjem pouzdanosti informacija o pomeranju tla i objekata na njemu u određenim vremenskim intervalima (Mihailović i Aleksić, 2008).
- S obzirom na metodologiju utvrđivanja stabilnih tačaka na terenu, u deformacionoj analizi, razlikujemo četiri pristupa:
  - Matematički modeli koji se zasnivaju na transformaciji koordinata tačaka tekuće u neku prethodnu epohu (Pelcer, Kaspari, Delft).
  - Metod istovremenog izravnanja rezultata merenja dveju epoha (Karlsrue).
  - Metod koji se zasniva na stabilnosti koordinatnog sistema (Mihailović).
  - Metod koji se zasniva na rotaciji koordinatnog sistema (Mihailović).

Posredno izravnanje slobodnih geodetskih mreža

- Gaus-Markovljev model izravnanja

  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$ – funkcionalni model

  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ – stohastički model

- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima.

Funkcionalni model

- Jednačine popravaka

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \Delta h_{i-j} + v_{\Delta h_{i-j}} \qquad (1)$$

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \widehat{H}_j - \widehat{H}_i \qquad (2)$$

Na osnovu izraza (1) i (2) može se napisati:

$$v_{\Delta h_{i-j}} = \left(\widehat{H}_j - \widehat{H}_i\right) - \Delta h_{i-j},\ \widehat{H}_j = H_j^0 + dH_j \text{ i } \widehat{H}_i = H_i^0 + dH_i,$$

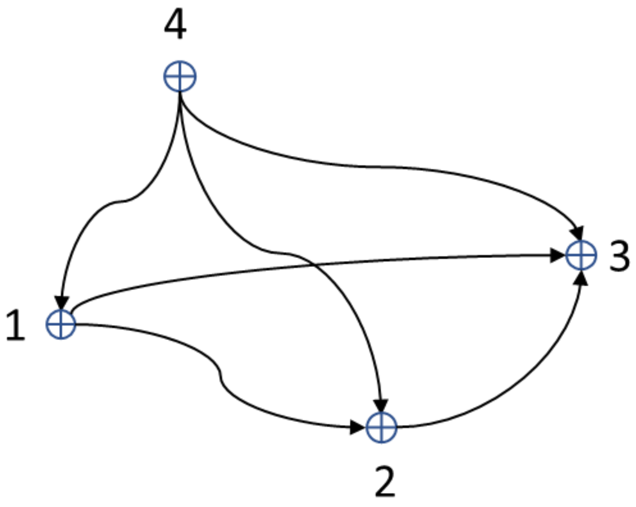
$$v_{\Delta h_{i-j}} = H_j^0 + dH_j - H_i^0 - dH_i - \Delta h_{i-j},$$

a onda:

$$v_{\Delta h_{i-j}} = dH_j - dH_i + f_{\Delta h_{i-j}},\ \ f_{\Delta h_{i-j}} = \left(H_j^0 - H_i^0\right) - \Delta h_{i-j}.$$

Funkcionalni model

- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**



U svrhu monitoringa pomeranja i deformacija inžnjerskog objekta uspostavljena je jednodimenzionalna geodetska mreža. Merenja u mreži realizuju se metodom geometrijskog nivelmana u zatvorenim nivelmanskim vlakovima. Reperi 1 i 2 su stabilizovani su van zone očekivanih deformacija, dok su reperi 3 i 4 smešteni na objektu.

Izravnati slobodnu geodetsku mrežu po funkcionalnom i stohatičkom modelu posrednog izravnanja. Datum definisati minimalnim tragom kofatorske matrice na repere osnovne mreže.

Jednačine popravaka:

$$v_{\Delta h_{1-2}} = dH_2 - dH_1 + f_{\Delta h_{1-2}}, \;\; f_{\Delta h_{1-2}} = (H_2^0 - H_1^0) - \Delta h_{1-2}$$

$$v_{\Delta h_{2-3}} = dH_3 - dH_2 + f_{\Delta h_{2-3}}, \;\; f_{\Delta h_{2-3}} = (H_3^0 - H_2^0) - \Delta h_{2-3}$$

$$\vdots$$

$$v_{\Delta h_{4-3}} = dH_3 - dH_4 + f_{\Delta h_{4-3}}, \;\; f_{\Delta h_{4-3}} = (H_3^0 - H_4^0) - \Delta h_{4-3}$$

Formiranje matrice dizajna:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_{\Delta h_{1-2}} \\ v_{\Delta h_{2-3}} \\ v_{\Delta h_{1-3}} \\ v_{\Delta h_{4-1}} \\ v_{\Delta h_{4-2}} \\ v_{\Delta h_{4-3}} \end{array} \end{array}$$

Formiranje vektora slobodnih članova:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{\Delta h_{1-2}} \\ f_{\Delta h_{2-3}} \\ f_{\Delta h_{1-3}} \\ f_{\Delta h_{4-1}} \\ f_{\Delta h_{4-2}} \\ f_{\Delta h_{4-3}} \end{bmatrix}$$

Stohastički model

- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Računanje standardnih devijacija visinskih razlika:

$\sigma_{\Delta h_{i-j}} = S_{i-j}[\mathrm{km}] \cdot \sigma_{\Delta h}$

S_{i-j} - dužina nivelmanske strane

$\sigma_{\Delta h}[\mathrm{ppm}]$ - standard merenja instrumenta

Homogenizacija težina:

$$P_{\Delta h_{i-j}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{i-j}}^2}$$

Za σ_0 usvojiti vrednost **1**!

$$P_{\Delta h_{1-2}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{1-2}}^2}, \dots, P_{\Delta h_{4-3}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{4-3}}^2}$$

Homogenizacija težina:

$$P_{\Delta h_{i-j}} = \frac{1}{S_{i-j}}$$

S_{i-j} - dužina nivelmanske strane

$$P_{\Delta h_{1-2}} = \frac{1}{S_{1-2}}, \dots, P_{\Delta h_{4-3}} = \frac{1}{S_{4-3}}$$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} P_{\Delta h_{1-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\Delta h_{2-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\Delta h_{1-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-3}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \Delta h_{1-2} \\ \Delta h_{2-3} \\ \Delta h_{1-3} \\ \Delta h_{4-1} \\ \Delta h_{4-2} \\ \Delta h_{4-3} \end{array}$$

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Kod slobodnih geodetskih mreža matrica dizajna $\mathbf{A}$ ima nepotpun rang $r(\mathbf{A}) = r < u$, tj. broj njenih linearno nezavisnih kolona je manji od broja nepoznatih parametara u. U tom slučaju matrica koeficijenata normalnih jednačina $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$ je singularna, jer je $\det(\mathbf{N}) = 0$.
- Veličina $d = u - r$ predstavlja defekt datuma geodetske mreže. Defekt datuma geodetske mreže jeste broj nedostajućih datumskih parametara.
- Datum geodetske mreže čine parametri koji definišu koordinatni sistem, odnosno parametri koji su neophodni za definisanje geodetske mreže po obliku, položaju i veličini.
- Defekt datuma geodetske mreže zavisi od vrste merenih veličina u geodetskoj mreži.

Model geodetske mreže	Merene veličine	Defekt $d = u - r$	Datumski parametri
1D	Visinske razlike	1	Translacija po H osi

Klasičan način definisanja datuma geodetske mreže

- Kod klasičnog načina definisanja datuma fiksira se neophodan (minimalan) broj koordinata tačaka/repera mreže.
- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Defekt datuma geodetske mreže je 1, pa je neophodno fiksirati visinu jednog od repera mreže. Fiksiramo visinu H_1 repera 1.

Matrica datumskih uslova:

$$\mathbf{R}^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^- & (\mathbf{R}^-)^T \\ \mathbf{R}^- & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^-$$

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ za deo tačaka mreže

- Kod ovog načina definisanja datuma sve datumske tačke imaju jednak doprinos definiciji datuma geodetske mreže.
- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Matrica datumskih uslova formira se na sledeći način:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 \end{array} \\ \mathbf{B}^T = & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

m – broj repera mreže koji učestvuju u definiciji datuma

Kontrola računanja:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{E},$$

gde je $\mathbf{E}$ jedinična matrica.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^+ & (\mathbf{B}^+)^T \\ \mathbf{B}^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$ ili $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^-$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:
$$\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T\mathbf{P}\mathbf{f} + \mathbf{n}^T\hat{\mathbf{x}}$$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{f}$$

$f = n - u + d$, n – broj merenja, u – broj nepoznatih parametara, d – defekt datuma mreže

Globlani test na grube greške

- Hipoteze

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ protiv $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

pri čemu je $\sigma^2 = M(m_0^2)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,f,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty} \rightarrow$ **FINV(**$\boldsymbol{\alpha}$**,** $\boldsymbol{f}$**,10000)**

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Defintivna kontrola izravnanja

Izravnate kote repera:

$$\widehat{H}_i = H_i^0 + dH_i$$

Merene veličine iz izravnatih kota repera:

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \widehat{H}_j - \widehat{H}_i$$

Kontrola izravnanja:

$$u_{\Delta h_{i-j}} = \widehat{\Delta h}_{i-j} - \Delta h_{i-j}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\Delta h_{i-j}} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Na ovaj način se kontrolišu sve moguće greške u postupku izravnanja.

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

  $$m_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f}},$$

  pri čemu je $f = n - u + d$ broj stepeni slobode.

- Standardne devijacije visina repera (lokalne mere tačnosti)

  $$\hat{\sigma}_{H_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{H}_i}}$$

  σ_0 - *a priori* standardna devijacija

  $Q_{\hat{H}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{H}_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & Q_{\hat{H}_m} \end{bmatrix}$$

Pelzer-ova metoda

- Metoda je bazirana na ispitivanju podudarnosti koordinata tačaka, dobijenih izravnanjem geodetske mreže u dve epohe. Svaka epoha merenih veličina izravnava se nezavisno, uz pretpostavku da merene veličine sadrže samo slučajne greške koje su normalno raspoređene.
- Postupak deformacione analize odvija se kroz sleće faze:
  - Ispitivanje homogenosti tačnosti merenja iz dve epohe;
  - Ispitivanje podudarnosti mreže u dve epohe;
  - Ispitivanje podudarnosti osnovnih tačaka mreže u dve epohe;
  - Lokalizacija nestabilnih tačaka osnovne mreže;
  - Ispitivanje podudarnosti tačaka na objektu.

Ispitivanje homogenosti tačnosti merenja iz dve epohe merenja

- Iz izravnanja dve epohe dobijaju se *a posteriori* varijanse $\hat{\sigma}_{0_1}^2 = m_{0_1}^2$ i $\hat{\sigma}_{0_2}^2 = m_{0_2}^2$ pa je neophodno utvrditi da li merene veličine u obe epohe imaju homogenu tačnost.
- Hipoteze

$$H_0 \colon M\left(\hat{\sigma}_{0_1}^2\right) = M\left(\hat{\sigma}_{0_2}^2\right) = \sigma_0^2 \quad \text{protiv} \quad H_a \colon M\left(\hat{\sigma}_{0_1}^2\right) \neq M\left(\hat{\sigma}_{0_2}^2\right) \neq \sigma_0^2$$

- Test statistika

$$T = \frac{\hat{\sigma}_{0_1}^2}{\hat{\sigma}_{0_2}^2} \sim F_{f_1, f_2} \quad \text{za} \quad \hat{\sigma}_{0_1}^2 > \hat{\sigma}_{0_2}^2 \quad \text{ili} \quad T = \frac{\hat{\sigma}_{0_2}^2}{\hat{\sigma}_{0_1}^2} \sim F_{f_2, f_1} \quad \text{za} \quad \hat{\sigma}_{0_2}^2 > \hat{\sigma}_{0_1}^2$$

f_1 i f_2 broj stepeni slobode u nultoj i kontrolnoj epohi merenja.

Ispitivanje homogenosti tačnosti merenja iz dve epohe merenja

- Ukoliko je $T \leq F_{1-\alpha,f_1,f_2}$ nulta hipoteza se ne odbacuje i računa se jedinstvena eksperimentalna varijansa:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{f_1 \hat{\sigma}_{0_1}^2 + f_2 \hat{\sigma}_{0_2}^2}{f}, \ \ f = f_1 + f_2.$$

Merenja jesu homogene tačnosti!

- Ukoliko je $T > F_{1-\alpha,f_1,f_2}$ nulta hipoteza se odbacuje.

Merenja nisu homogene tačnosti. Postupak deformacione analize je završen.

Ispitivanje podudarnosti tačaka mreže u dve epohe merenja

- Podudarnost mreže ispituje se pomoću testova matematičke statistike.
- Hipoteze

$$H_0: M(\hat{\mathbf{x}}_1) = M(\hat{\mathbf{x}}_2) \quad \text{protiv} \quad H_a: M(\hat{\mathbf{x}}_1) \neq M(\hat{\mathbf{x}}_2)$$

$\hat{\mathbf{x}}_1$ i $\hat{\mathbf{x}}_2$ vektori izravnatih koordinata nulte i kontrolne epohe merenja.

- Srednje neuklapanje

$$\theta^2 = \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{+} \mathbf{d}}{h}, \quad \mathbf{d} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{d}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2}$$

$\mathbf{d}$ – vektor pomeranja, $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{+}$ – pseudoinverzija kofaktorske matrice pomeranja i $h = u - d$ – rang matrice kofaktorske matrice pomeranja $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}}$.

Ispitivanje podudarnosti tačaka mreže u dve epohe merenja

- Test statistika

$$T = \frac{\theta^2}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{h,f}$$

Ukoliko je $T \leq F_{1-\alpha,h,f}$ nulta hipoteza se ne odbacuje, odnosno mreža je podudarna u dve epohe.

Ukoliko je $T > F_{1-\alpha,h,f}$ nulta hipoteza se odbacuje, odnosno mreža nije podudarna u dve epohe.

Ispitivanje podudarnosti osnovnih tačaka mreže u dve epohe merenja

- Ukoliko se ustanovi da geodetska mreža nije podudarna u dve epohe vrši se ispitivanje podudarnosti osnovnih tačaka mreže.
- Hipoteze

$$H_0\colon M(\hat{\mathbf{x}}_{S1}) = M(\hat{\mathbf{x}}_{S2}) \quad \text{protiv} \quad H_a\colon M(\hat{\mathbf{x}}_{S1}) \neq M(\hat{\mathbf{x}}_{S2})$$

$\hat{\mathbf{x}}_{S1}$ i $\hat{\mathbf{x}}_{S2}$ vektori izravnatih koordinata osnovnih tačaka iz nulte i kontrolne epohe merenja.

Vektor pomeranja $\mathbf{d}$ i pseudoinverzija kofaktorske matrice pomeranja $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{+}$ se dekomponuju na sledeći način:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_S \\ \mathbf{d}_O \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{+} = \mathbf{P}_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{SS} & \mathbf{P}_{SO} \\ \mathbf{P}_{OS} & \mathbf{P}_{OO} \end{bmatrix}$$

Oznaka S se odnosi na tačke osnovne mreže, a oznaka O na tačke koje reprezentuju objekat.

Ispitivanje podudarnosti osnovnih tačaka mreže u dve epohe merenja

- Srednje neuklapanje

$$\theta_S^2 = \frac{\mathbf{d}_S^T \overline{\mathbf{P}}_{SS} \mathbf{d}_S}{h_S}$$

$\overline{\mathbf{P}}_{SS} = \mathbf{P}_{SS} - \mathbf{P}_{SO}\mathbf{P}_{OO}^{-1}\mathbf{P}_{OS}$ i $h_S = rank(\overline{\mathbf{P}}_{SS})$.

- Test statistika

$$T = \frac{\theta_S^2}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{h_S,f}$$

Ako je $T \leq F_{1-\alpha,h_S,f}$ nulta hipoteza se ne odbacuje, odnosno tačke osnovne mreže su podudarne u dve epohe.

Ako je $T > F_{1-\alpha,h_S,f}$ nulta hipoteza se odbacuje, odnosno …

Lokalizacija nestabilnih tačaka osnovne mreže

- Ukoliko tačke osnovne mreže nisu podudarne u vremenskom intervalu između dve epohe sprovodi se postupak lokalizacije nestabilnih tačaka osnovne mreže.
- Vektor pomeranja $\mathbf{d}_S$ i odgovarajuća matrica $\overline{\mathbf{P}}_{SS}$ dekomponuju se na sledeći način:

$$\mathbf{d}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_F \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{P}}_{\mathrm{SS}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{FF} & \mathbf{P}_{FB} \\ \mathbf{P}_{BF} & \mathbf{P}_{BB} \end{bmatrix}$$

Oznaka F odnosi se na osnovne tačke koje se smatraju uslovno stabilnim, a oznaka B na osnovne tačke koje se smatraju uslovno nestabilnim.

Lokalizacija nestabilnih tačaka osnovne mreže

- Srednji rascep θ_j^2 određuje se za svaku tačku osnovne mreže, na sledeći način:

$$\theta_j^2 = \frac{\bar{\mathbf{d}}_{B_j}^T \mathbf{P}_{BB_j} \bar{\mathbf{d}}_{B_j}}{h_{B_j}}, (j = 1,2, \dots, k),$$

$$\bar{\mathbf{d}}_B = \mathbf{d}_B + \mathbf{P}_{BB}^{-1} \mathbf{P}_{BF} \mathbf{d}_F.$$

U skupu k vrednosti $\theta_j (j = 1,2, \dots, k)$ uočava se maksimalna vrednost $\theta_{max}^2 = max\theta_j^2$ i tačka na koju se odnosi maksimalna vrednost smatra se nestabilnom. Ova tačaka izbacuje se iz skupa osnovnih tačaka i u daljem postupku posmatra se kao tačka na objektu.

Lokalizacija nestabilnih tačaka osnovne mreže

- Za preostalih $k-1$ tačaka osnovne mreže određuje se srednje neuklapanje:

$$\theta_{REST}^2 = \frac{\mathbf{d}_F^T \overline{\mathbf{P}}_{FF} \mathbf{d}_F}{h_F},$$

$\overline{\mathbf{P}}_{FF} = \mathbf{P}_{FF} - \mathbf{P}_{FB}\mathbf{P}_{BB}^{-1}\mathbf{P}_{BF}$ i $h_F = rank(\overline{\mathbf{P}}_{FF})$.

- Test statistika

$$T = \frac{\theta^2{}_{REST}}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{h_F,f}$$

Ako je $T \leq F_{1-\alpha,h_F,f}$ nulta hipoteza se ne odbacuje, odnosno smatra se da je svih $k-1$ osnovnih tačaka stabilno. Ako je $T > F_{1-\alpha,h_F,f}$ nulta hipoteza se odbacuje, odnosno među $k-1$ osnovnih tačaka još uvek ima nestabilnih tačaka. Na ovaj način potrebno je identifikovati sve nestabilne (pomerene) tačke osnovne mreže.

Ispitivanje podudarnosti tačaka na objektu u dve epohe

- Vektor pomeranja $\mathbf{d}$ i pseudoinverzija kofaktorske matrice pomeranja $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{+}$ dekomponuju se na sledeći način:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_F \\ \mathbf{d}_O \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{+} = \mathbf{P}_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{FF} & \mathbf{P}_{FO} \\ \mathbf{P}_{OF} & \mathbf{P}_{OO} \end{bmatrix}$$

  Oznaka F odnosi se na osnovne tačke koje su identifikovane kao stabilne, dok se oznaka O odnosi na tačke osnovne mreže koje su identifikovane kao nestabilne i tačke na objektu.

- Hipoteze

$$H_0 \colon M(\hat{\mathbf{x}}_{O1}) = M(\hat{\mathbf{x}}_{O2}) \quad \text{protiv} \quad H_a \colon M(\hat{\mathbf{x}}_{O1}) \neq M(\hat{\mathbf{x}}_{O2})$$

  $\hat{\mathbf{x}}_{O1}$ i $\hat{\mathbf{x}}_{O2}$ vektori izravnatih koordinata tačaka na objektu iz nulte i kontrolne epohe merenja.

Ispitivanje podudarnosti tačaka na objektu u dve epohe

- Srednje neuklapanje

$$\theta_O^2 = \frac{\bar{\mathbf{d}}_O^T \mathbf{P}_{OO} \bar{\mathbf{d}}_O}{h_O},$$

$\bar{\mathbf{d}}_O = \mathbf{d}_O + \mathbf{P}_{OO}^{-1} \mathbf{P}_{OF} \mathbf{d}_F$ i $h_O = rank(\mathbf{P}_{OO})$.

- Test statistika

$$T = \frac{\theta_O^2}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{h_O, f}$$

Ako je $T \leq F_{1-\alpha, h_O, f}$ nulta hipoteza se ne odbacuje, u suprotnom nulta hipoteza se odbacuje.