FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
DEPARTMAN ZA GRAĐEVINARSTVO I GEODEZIJU
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

UVOD U GEODEZIJU

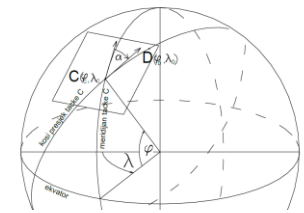
Direkcioni ugao, sinusna, kosinusna i tangesna teorema

Vanr. prof. Marko Marković, master inž. geodez.

Novi Sad, 2024/2025

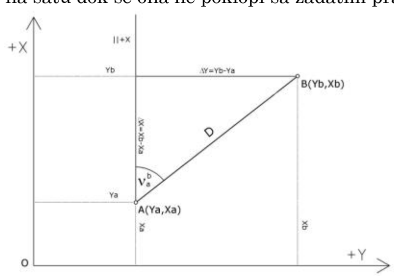
Azimut

- Azimut je arapska reč koja se izgovara kao as-sumut, a znači pravac definisan sa uglom.
- Azimut – ugao u horizontalnoj ravni koji zaklapaju tangenta na meridijan povučena u temenu ugla sa tangentom na geodetsku liniju (najkraća kriva između dve tačke na elipsoidu) koja prolazi kroz tačke C i D, takođe povučenom iz temena ugla.
- Instrumenti pomoću kojih se mere azimuti u horizontalnoj ravni nazivaju se kompasi.

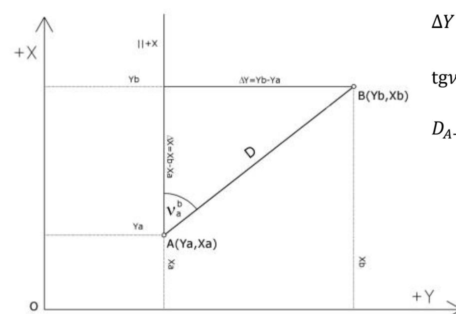


Direkcioni ugao

- Orijentacija duži ili neke linije u projekcionoj ravni regulisana je državnim koordinatnim sistemom i direkcionim uglom.
- Direkcioni ugao se definiše kao ugao za koji treba zarotirati paralelu sa X osom provučenu kroz početnu tačku duži u smeru kazaljke na satu dok se ona ne poklopi sa zadatim pravcem duži.



Računanje direkcionog ugla i dužine iz koordinata



$$\Delta X = X_B - X_A$$

$$\Delta Y = Y_B - Y_A$$

$$\mathrm{tg}\nu_A^B = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$D_{A-B} = \sqrt{\Delta Y^2 + \Delta X^2}$$

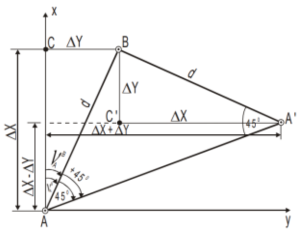
Računanje direkcionog ugla i dužine iz koordinata

➢Kontrola računanja direkcionog ugla:

$$\mathrm{tg}(\nu_A^B + 45°) = \frac{\Delta X + \Delta Y}{\Delta X - \Delta Y},$$

$$\mathrm{tg}(\nu_A^B + 45°) = \frac{\mathrm{tg}\,\nu_A^B + \mathrm{tg}\,45°}{1 - \mathrm{tg}\,\nu_A^B \cdot \mathrm{tg}\,45°} =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,\nu_A^B + 1}{1 - \mathrm{tg}\,\nu_A^B} = \frac{\frac{\Delta Y + \Delta X}{\Delta X}}{\frac{\Delta X - \Delta Y}{\Delta X}} = \frac{\Delta X + \Delta Y}{\Delta X - \Delta Y}.$$

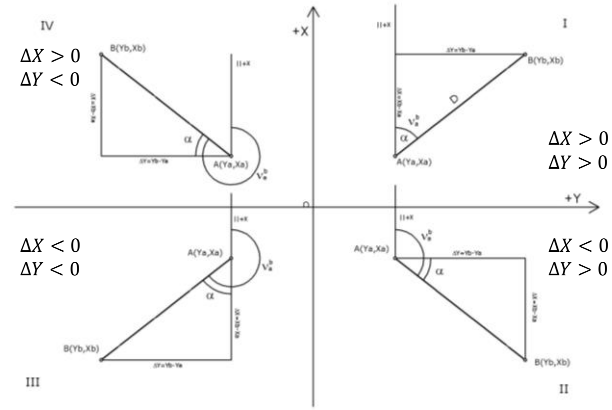


➢Kontrola računanja dužine:

$$D_{A-B} = \frac{\Delta Y}{\sin \nu_A^B} = \frac{\Delta X}{\cos \nu_A^B}.$$

5

Računanje direkcionog ugla i dužine iz koordinata



6

Računanje direkcionog ugla i dužine iz koordinata

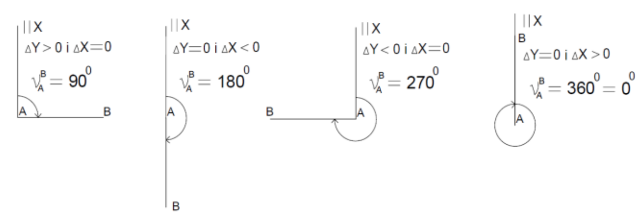
➢Određivanje kvadranta i računanje direkcionog ugla.

Kvadrant	ΔY	ΔX	tg α	ν_A^B
I	+	+	$\frac{\Delta Y}{\Delta X}$	α
II	+	-	$\left\lvert\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right\rvert$	$\alpha + 90°$
III	-	-	$\frac{\Delta Y}{\Delta X}$	$\alpha + 180°$
IV	-	+	$\left\lvert\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right\rvert$	$\alpha + 270°$

7

Računanje direkcionog ugla i dužine iz koordinata

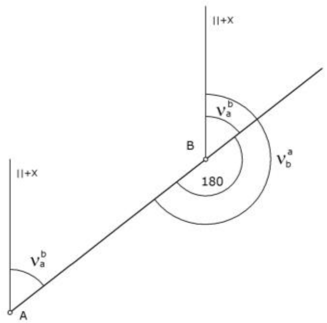
➢Specijalni slučajevi računanja direkcionog ugla.



8

Računanje direkcionog ugla i dužine iz koordinata

- Osobine direkcionog ugla.



$\nu_B^A = \nu_A^B \pm 180°$

$\nu_B^A = \nu_A^B + 180°, \nu_A^B < 180°$

$\nu_B^A = \nu_A^B - 180°, \nu_A^B > 180°$

Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

- U različitim vrstama geodetskih radova često se javlja situacija da se određeni ugao ili dužina ne mogu izmeriti na terenu.
- U ovakvim situacijama, za potrebe određivanja ovih veličina formiraju se pomoćni trouglovi u kojima se mere druge stranice ili uglovi.
- Potrebne veličine se određuju indirektno računanjem nepoznatih elemenata u trouglu.
- U postupku računanja nepoznatih elemenata u trouglovima važi generalno pravilo da je nepoznate elemente moguće pronaći ako je poznato, odnosno izmereno, najmanje tri elementa u trouglu, među kojima mora biti najmanje jedna stranica trougla.

Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

- Dužina A-C ne može biti izmerena, jer je tačka C nepristupačna.
- Postavi se pomoćna tačka B na pristupačnom mestu i izmeri se dužina A-B i uglovi α i β.
- Nepoznata dužina A-C se računa pomoću sinusne teoreme:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°, \gamma = 180° - \alpha - \beta,$

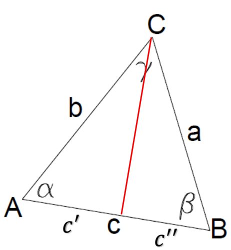
$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)},$

$b = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\beta)\,,$

$a = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha)\,.$

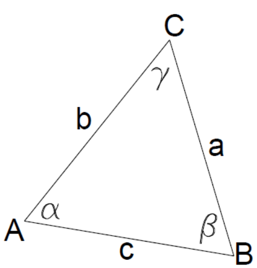
Kontrola:

$c = b \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(\beta)$



Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

- Dužinu A-B nije moguće izmeriti jer se tačke A i B ne dogledaju.
- Postavi se pomoćna tačka C, a zatim izmere dužine A-C i B-C i ugao γ.
- Nepoznata dužina A-B može se sračunati pomoću:
  - kosinusne teoreme;
  - tangensne teoreme;
  - podelom trougla na dva pravougla trougla.



Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

➢ Određivanje nepoznate dužine A-B pomoću kosinusne teoreme:

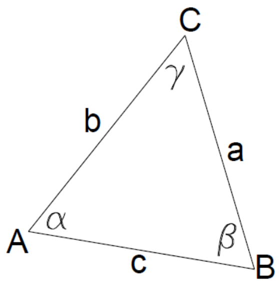
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)\,,$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)}\,,$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)},$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\gamma)}{c}\right),$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}\right).$$



13

Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

➢ Određivanje nepoznate dužine A-B pomoću tangensne teoreme:

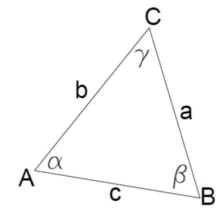
$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

$$\alpha + \beta = 180° - \gamma, \qquad \frac{\beta+\alpha}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2},$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = \frac{b-a}{b+a} \cdot \mathrm{tg}\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\beta = \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}, \qquad \alpha = \frac{\beta+\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$b = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\beta)\,, \qquad a = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha)\,.$$



14

Određivanje dužine iz pomoćnog trougla

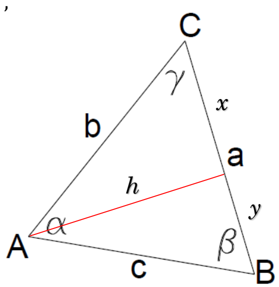
➢ Podela trougla ABC na dva pravougla trougla.

$$h = b \cdot \sin(\gamma)\,, \qquad x = b \cdot \cos(\gamma)\,,$$

$$y = a - x, \qquad \beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{h}{y}\right),$$

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma,$$

$$c = \sqrt{y^2 + h^2}.$$



15

PITANJA?

16