FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 3
- VEŽBA 6 -

NOVI SAD, 2024

Izravnanje po metodi posrednih merenja

- Gaus-Markovljev model izravnanja

$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$ – funkcionalni model

$\mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_l, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ – stohastički model

- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima.

Funkcionalni model

- Funkcije veze – GNSS bazni vektori

$$\Delta\hat{X}_{ij} = \Delta X_{ij} + v_{\Delta X_{ij}} = \hat{X}_j - \hat{X}_i = F_1\left(\hat{X}_i, \hat{X}_j\right), \qquad \hat{X}_i = X_i^0 + dX_i$$

$$\Delta\hat{Y}_{ij} = \Delta Y_{ij} + v_{\Delta Y_{ij}} = \hat{Y}_j - \hat{Y}_i = F_2\left(\hat{Y}_i, \hat{Y}_j\right), \qquad \hat{Y}_i = Y_i^0 + dY_i$$

$$\Delta\hat{Z}_{ij} = \Delta Z_{ij} + v_{\Delta Z_{ij}} = \hat{Z}_j - \hat{Z}_i = F_3(\hat{Z}_i, \hat{Z}_j), \qquad \hat{Z}_i = Z_i^0 + dZ_i$$

- Jednačine popravaka

$$v_{\Delta X_{ij}} = dX_j - dX_i + f_{\Delta X_{ij}}, \quad f_{\Delta X_{ij}} = \left(X_j^0 - X_i^0\right) - \Delta X_{ij}$$

$$v_{\Delta Y_{ij}} = dY_j - dY_i + f_{\Delta Y_{ij}}, \quad f_{\Delta Y_{ij}} = \left(Y_j^0 - Y_i^0\right) - \Delta Y_{ij}$$

$$v_{\Delta Z_{ij}} = dZ_j - dZ_i + f_{\Delta Z_{ij}}, \quad f_{\Delta Z_{ij}} = \left(Z_j^0 - Z_i^0\right) - \Delta Z_{ij}$$

Broj merenja $n = 3 \cdot m$
m – broj GNSS baznih vektora

Stohastički model

- Kovarijaciona matrica merenih veličina

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\Delta X_1} & \sigma_{\Delta X_1 \Delta Y_1} & \sigma_{\Delta X_1 \Delta Z_1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\Delta Y_1 \Delta X_1} & \sigma^2_{\Delta Y_1} & \sigma_{\Delta Y_1 \Delta Z_1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\Delta Z_1 \Delta X_1} & \sigma_{\Delta Z_1 \Delta Y_1} & \sigma^2_{\Delta Z_1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma^2_{\Delta X_m} & \sigma_{\Delta X_m \Delta Y_m} & \sigma_{\Delta X_m \Delta Z_m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\Delta Y_m \Delta X_m} & \sigma^2_{\Delta Y_m} & \sigma_{\Delta Y_m \Delta Z_m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\Delta Z_m \Delta X_m} & \sigma_{\Delta Z_m \Delta Y_m} & \sigma^2_{\Delta Z_m} \end{bmatrix}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{K}_l^{-1}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{K}_l^{-1}\mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n},\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^- \text{ ili } \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$$
$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:
$$\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{K}_l^{-1}\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T\mathbf{K}_l^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{n}^T\hat{\mathbf{x}}$$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{K}_l^{-1}\hat{\mathbf{v}}}{f}$$

$f = n - u + d,\ n = 3 \cdot m$ – broj merenja, u – broj nepoznatih parametara, d – defekt mreže

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Kod slobodnih geodetskih mreža matrica dizajna $\mathbf{A}$ ima nepotpun rang $r(\mathbf{A}) = r < u$, tj. broj njenih linearno nezavisnih kolona je manji od broja nepoznatih parametara u. U tom slučaju matrica koeficijenata normalnih jednačina $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{A}$ je singularna, jer je $\det(\mathbf{N}) = 0$.
- Veličina $d = u - r$ predstavlja defekt datuma geodetske mreže. Defekt datuma geodetske mreže jeste broj nedostajućih datumskih parametara.
- Datum geodetske mreže čine parametri koji definišu koordinatni sistem, odnosno parametri koji su neophodni za definisanje geodetske mreže po obliku, položaju i veličini.

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Defekt datuma geodetske mreže zavisi od vrste merenih veličina u geodetskoj mreži.

Merene veličine	**Datumski parametri**						
	Translacije			**Rotacije**			**Razmera**
	t_X	t_Y	t_Z	r_X	r_Y	r_Z	s
Kose dužine	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓
Horzin. pravci	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Horzin. uglovi	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Azimuti	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗
GNSS 2D vektori	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓
GNSS 3D vektori	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✓
Zenitni uglovi	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✗
Visinske razlike	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✓

Klasičan način definisanja datuma geodetske mreže

- Kod klasičnog načina definisanja datuma fiksira se neophodan (minimalan) broj koordinata tačaka mreže.

  Budući da su u mreži mereni GNSS 3D bazni vektori, defekt datuma geodetske mreže iznosi 3 (definisane su rotacije oko koordinatnih osa i razmera). Shodno tome, fiksiramo koordinate X_1, Y_1 i Z_1.

  Matrica datumskih uslova:

$$
\mathbf{R}^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} dX_1 & dY_1 & dZ_1 & dX_2 & dY_2 & dZ_2 & & dX_m & dY_m & dZ_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^- & (\mathbf{R}^-)^T \\ \mathbf{R}^- & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^-
$$

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Kod ovog načina definisanja datuma sve tačke mreže koje učestvuju u definiciji datuma imaju jednak tretman.

Matrica datumskih uslova formira se na sledeći način:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} dX_1 & dY_1 & dZ_1 & dX_2 & dY_2 & dZ_2 & & dX_m & dY_m & dZ_m \end{array} \\
\mathbf{B}^T = & \begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 & & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}}
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{array}
\end{array}
$$

Kontrola računanja:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^+ & (\mathbf{B}^+)^T \\ \mathbf{B}^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$$

m – broj tačaka koje učestvuju u definiciji datuma geodetske mreže

Globlani test na grube greške

- Hipoteze

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ protiv $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

pri čemu je $\sigma^2 = M\left(m_0^2\right)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,f,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty} \rightarrow$ **FINV($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{f}$,10000)**

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Definitivna kontrola izravnanja

Izravnate koordinate:

$$\hat{Y}_i = Y_i^0 + dY_i$$

$$\hat{X}_i = X_i^0 + dX_i$$

$$\hat{Z}_i = Z_i^0 + dZ_i$$

Merene veličine iz izravnatih koordinata:

$$\Delta\hat{X}_{ij} = \hat{X}_j - \hat{X}_i$$

$$\Delta\hat{Y}_{ij} = \hat{Y}_j - \hat{Y}_i$$

$$\Delta\hat{Z}_{ij} = \hat{Z}_j - \hat{Z}_i$$

Kontrola izravnanja:

$$u_{\Delta X_{ij}} = \Delta\hat{X}_{ij} - \Delta X_{ij}$$

$$u_{\Delta Y_{ij}} = \Delta\hat{Y}_{ij} - \Delta Y_{ij}$$

$$u_{\Delta Z_{ij}} = \Delta\hat{Z}_{ij} - \Delta Z_{ij}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\Delta X_{ij}} \\ u_{\Delta Y_{ij}} \\ u_{\Delta Z_{ij}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Standardne devijacije koordinata tačaka

$$\hat{\sigma}_{X_i} = \sigma_0\sqrt{Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i}}, \quad \hat{\sigma}_{Y_i} = \sigma_0\sqrt{Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}}, \quad \hat{\sigma}_{Z_i} = \sigma_0\sqrt{Q_{\hat{Z}_i\hat{Z}_i}}$$

σ_0 - *a priori* standardna devijacija

$Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i}$, $Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}$, $Q_{\hat{Z}_i\hat{Z}_i}$- dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Standardne devijacije tačke u prostoru

$$\hat{\sigma}_{P_i} = \sqrt{\hat{\sigma}_{X_i}^2 + \hat{\sigma}_{Y_i}^2 + \hat{\sigma}_{Z_i}^2}$$

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Standardne devijacije izravnatih merenih veličina

$$\hat{\sigma}_{l_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}}$$

σ_0 - *a priori* standardna devijacija

$Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}$

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T$ - kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- Koeficijenti unutrašnje pouzdanosti

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T$ - kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{K}_l - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}$ - kofaktorska matrica popravaka merenih veličina

$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} \cdot \mathbf{K}_l^{-1}$ - matrica koeficijenata unutrašnje pouzdanosti

r_i - dijagonalni elementi matrice $\mathbf{R}$

Kontrola:

$$\sum ri = f,$$

$f = n - u + d$ – broj stepeni slobode.

Koeficijent r_i predstavlja uticaj grube greške i-tog opažanja na i-tu popravku. Verovatnoća otkrivanja grube greške je veća ukoliko je koeficijent r_i veći.

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- Marginalna gruba greška koja se može otkriti *Data snooping* testom

$$G_i = \frac{\sigma_0\sqrt{\lambda_0}}{P_i\sqrt{Q_{\hat{v}_i\hat{v}_i}}}, \sqrt{\lambda_0} \text{ - parametar necentralnosti}$$

$$\sqrt{\lambda_0} = t_{1-\beta_0} + t_{1-\alpha_0/2}$$

$t_{1-\beta_0}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojenu moć testa

$t_{1-\alpha_0/2}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojeni nivo značajnosti

$\sqrt{\lambda_0} = 0.842 + 1.96 = \mathbf{2.802}$, za $1 - \beta_0 = 0.80$ i $\alpha_0 = 0.05$.

Marginalna greška G_i predstavlja vrednost grube greške koja se može otkriti *Data snooping* testom, pod pretpostavkom postojanja samo jedne grube greške.