FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 3
- VEŽBA 7 -

NOVI SAD, 2024

Izravnanje po metodi posrednih merenja

- Gaus-Markovljev model izravnanja

  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$ – funkcionalni model

  $\mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_l, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ – stohastički model

- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima.

Funkcionalni model

- Funkcije veze

$$\alpha_{i-j} + v_{\alpha_{i-j}} = \arctan\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right) + Z_i$$ – horizontalni pravci

$$\beta_{j-i-k} + v_{\beta_{j-i-k}} = \arctan\left(\frac{Y_k - Y_i}{X_k - X_i}\right) - \arctan\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right)$$ – horizontalni ugao

$$D_{i-j} + v_{D_{i-j}} = \sqrt{(Y_j - Y_i)^2 + (X_j - X_i)^2}$$ – horizontalne dužine

$$\Delta Y_{ij} + v_{\Delta Y_{ij}} = Y_j - Y_i$$

$$\Delta X_{ij} + v_{\Delta X_{ij}} = X_j - X_i$$ – GNSS bazni vektori

Funkcionalni model

- Nelinearne funkcije veze linearizuju se razvojem u Tejlorov red u okolini približnih vrednosti nepoznatih parametara, nakon čega se dobijaju jednačine popravaka:

$$v_{\alpha_{i-j}} = a_{ij} \cdot dX_i + b_{ij} \cdot dY_i + a_{ji} \cdot dX_j + b_{ji} \cdot dY_j + dZ_i + f_{\alpha_{i-j}}$$

$$v_{\beta_{j-i-k}} = \left(a_{ik} - a_{ij}\right) \cdot dX_i + \left(b_{ik} - b_{ij}\right) \cdot dY_i + a_{ki} \cdot dX_k + b_{ki} \cdot dY_k - a_{ji} \cdot dX_j - b_{ji} \cdot dY_j + f_{\beta_{j-i-k}}$$

$$v_{D_{i-j}} = A_{ij} \cdot dX_i + B_{ij} \cdot dY_i + A_{ji} \cdot dX_j + B_{ji} \cdot dY_j + f_{D_{i-j}}$$

$$v_{\Delta Y_{ij}} = dY_j - dY_i + f_{\Delta Y_{ij}}$$

$$v_{\Delta X_{ij}} = dX_j - dX_i + f_{\Delta X_{ij}}$$

Funkcionalni model

- Slobodni članovi

$$f_{\alpha_{i-j}} = \alpha_{i-j}^{0} - \alpha_{i-j},\;\; \alpha_{i-j}^{0} = \nu_i^j + Z_i^0,\;\; \nu_i^j = \arctan\left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{X_j^0 - X_i^0}\right)$$

$$f_{\beta_{j-i-k}} = \beta_{j-i-k}^{0} - \beta_{j-i-k},\;\; \beta_{j-i-k}^{0} = \nu_i^k - \nu_i^j,\;\; \nu_i^k = \arctan\left(\frac{Y_k^0 - Y_i^0}{X_k^0 - X_i^0}\right),\;\; \nu_i^j = \arctan\left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{X_j^0 - X_i^0}\right)$$

$$f_{D_{i-j}} = D_{i-j}^{0} - D_{i-j},\;\; D_{i-j}^{0} = \sqrt{(Y_j^0 - Y_i^0)^2 + (X_j^0 - X_i^0)^2}$$

$$f_{\Delta Y_{ij}} = \left(Y_j^0 - Y_i^0\right) - \Delta Y_{ij}$$

$$f_{\Delta X_{ij}} = \left(X_j^0 - X_i^0\right) - \Delta X_{ij}$$

$Y_i^0, Y_j^0, Y_k^0, X_i^0, X_j^0, X_k^0, Z_i^0$ - približne vrednosti nepoznatih parametara

Funkcionalni model

- Koeficijenti a_{ij}, b_{ij}, A_{ij} i B_{ij}

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha_{i-j}}{\partial X_i}\right)_0 = \frac{\rho'' \sin \nu_i^j}{D_{i-j}^0}$$

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha_{i-j}}{\partial Y_i}\right)_0 = -\frac{\rho'' \cos \nu_i^j}{D_{i-j}^0}$$

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial D_{i-j}}{\partial X_i}\right)_0 = -\cos \nu_i^j$$

$$B_{ij} = \left(\frac{\partial D_{i-j}}{\partial Y_i}\right)_0 = -\sin \nu_i^j$$

Stohastički model

- Kovarijaciona matrica merenih veličina

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\alpha_{i-j}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\beta_{j-i-k}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{D_{i-j}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{\Delta Y_{i-j}} & \sigma_{\Delta Y_{i-j} \Delta X_{i-j}} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta X_{i-j} \Delta Y_{i-j}} & \sigma^2_{\Delta X_{i-j}} \end{bmatrix}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{K}_l^{-1}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{K}_l^{-1}\mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n},\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^- \text{ ili } \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:
$$\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{K}_l^{-1}\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T\mathbf{K}_l^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{n}^T\hat{\mathbf{x}}$$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{K}_l^{-1}\hat{\mathbf{v}}}{f}$$

$f = n - u + d,$ n – broj merenja, u – broj nepoznatih parametara, d – defekt mreže

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Kod slobodnih geodetskih mreža matrica dizajna $\mathbf{A}$ ima nepotpun rang $r(\mathbf{A}) = r < u$, tj. broj njenih linearno nezavisnih kolona je manji od broja nepoznatih parametara u. U tom slučaju matrica koeficijenata normalnih jednačina $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{K}_l^{-1}\mathbf{A}$ je singularna, jer je $\det(\mathbf{N}) = 0$.
- Veličina $d = u - r$ predstavlja defekt datuma geodetske mreže. Defekt datuma geodetske mreže jeste broj nedostajućih datumskih parametara.
- Datum geodetske mreže čine parametri koji definišu koordinatni sistem, odnosno parametri koji su neophodni za definisanje geodetske mreže po obliku, položaju i veličini.

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Defekt datuma geodetske mreže zavisi od vrste merenih veličina u geodetskoj mreži.

Merene veličine	**Datumski parametri**			
	Translacije		Rotacija	Razmera
	t_Y	t_X	r_Z	s
Dužine	✗	✗	✗	✓
Pravci	✗	✗	✗	✗
Uglovi	✗	✗	✗	✗
Azimuti	✗	✗	✓	✗
GNSS 2D vektori	✗	✗	✓	✓

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Kod ovog načina definisanja datuma sve tačke mreže koje učestvuju u definiciji datuma imaju jednak tretman.

Matrica datumskih uslova formira se na sledeći način:

$$\mathbf{B}^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} dY_1 & dX_1 & dY_2 & dX_2 & dY_3 & dX_3 & dY_4 & dX_4 & dZ_1 & dZ_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} {}^1\!/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1\!/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1\!/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1\!/_{\sqrt{m}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1\!/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1\!/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1\!/_{\sqrt{m}} & 0 & {}^1\!/_{\sqrt{m}} & 0 & 0 \\ -\xi_1 & \eta_1 & -\xi_2 & \eta_2 & -\xi_3 & \eta_3 & -\xi_4 & \eta_4 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \xi_1 & \eta_2 & \xi_2 & \eta_3 & \xi_3 & \eta_4 & \xi_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t_Y \\ t_X \\ r_Z \\ s \end{array}$$

Kontrola računanja:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^+ & (\mathbf{B}^+)^T \\ \mathbf{B}^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$$

$$\xi_i = \frac{X_i - \bar{X}_0}{g}, \eta_i = \frac{Y_i - \bar{Y}_0}{g}$$

$$\bar{X}_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \bar{Y}_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$$

$$g = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y}_0)^2 + \sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_0)^2}$$

m – broj tačaka koje učestvuju u definiciji datuma geodetske mreže

Globlani test na grube greške

- Hipoteze

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ protiv $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

pri čemu je $\sigma^2 = M\left(m_0^2\right)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,f,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty}$ → **FINV($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{f}$,10000)**

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha,f,\infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Defintivna kontrola izravnanja

Izravnate koordinate:

$$\hat{Y}_i = Y_i^0 + dY_i$$

$$\hat{X}_i = X_i^0 + dX_i$$

$$\hat{Z}_i = Z_{0,i} + dZ_i$$

Merene veličine iz izravnatih koordinata:

$$\hat{\alpha}_{i-j} = \hat{\nu}_i^j + \hat{Z}, \qquad \hat{\nu}_i^j = \arctan\left(\frac{\hat{Y}_j - \hat{Y}_i}{\hat{X}_j - \hat{X}_i}\right)$$

$$\widehat{D}_{i-j} = \sqrt{(\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2 + (\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2}$$

$$\hat{\beta}_{i-j-k} = \hat{\nu}_i^k - \hat{\nu}_i^j$$

$$\Delta\hat{Y}_{ij} = \hat{Y}_j - \hat{Y}_i$$

$$\Delta\hat{X}_{ij} = \hat{X}_j - \hat{X}_i$$

Kontrola izravnanja:

$$u_{\alpha_{i-j}} = \hat{\alpha}_{i-j} - \alpha_{i-j}, \quad u_{D_{i-j}} = \widehat{D}_{i-j} - D_{i-j}$$

$$u_{\beta_{i-j-k}} = \hat{\beta}_{i-j-k} - \beta_{i-j-k}, \quad u_{\Delta Y_{ij}} = \Delta\hat{Y}_{ij} - \Delta Y_{ij}$$

$$u_{\Delta X_{ij}} = \Delta\hat{X}_{ij} - \Delta X_{ij}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\alpha_{i-j}} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{D_{i-j}} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{\beta_{i-j-k}} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{\Delta Y_{ij}} \\ u_{\Delta X_{ij}} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Standardne devijacije koordinata tačaka

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{Y}_1\hat{Y}_1} & Q_{\hat{Y}_1\hat{X}_1} & \cdots & & \cdots & \\ Q_{\hat{X}_1\hat{Y}_1} & Q_{\hat{X}_1\hat{X}_1} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & Q_{\hat{Y}_m\hat{Y}_m} & Q_{\hat{Y}_m\hat{X}_m} \\ \cdots & & \cdots & & Q_{\hat{X}_m\hat{Y}_m} & Q_{\hat{X}_m\hat{X}_m} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_{Y_i} = \sigma_0\sqrt{Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}}\,, \quad \hat{\sigma}_{X_i} = \sigma_0\sqrt{Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i}}$$

σ_0 - *a priori* standardna devijacija

$Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}$, $Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Standardne devijacije položaja tačaka

$$\hat{\sigma}_{P_i} = \sqrt{\hat{\sigma}_{Y_i}^2 + \hat{\sigma}_{X_i}^2}$$

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Standardne devijacija izravnatih merenih veličina

$$\hat{\sigma}_{l_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}}$$

σ_0 - *a priori* standardna devijacija

$Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}$

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T$ - kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- Koeficijenti unutrašnje pouzdanosti

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T$ - kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{K}_l - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}$ - kofaktorska matrica popravaka merenih veličina

$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} \cdot \mathbf{K}_l^{-1}$ - matrica koeficijenata unutrašnje pouzdanosti

r_i - dijagonalni elementi matrice $\mathbf{R}$

Kontrola:

$$\sum ri = f,$$

$f = n - u + d$ – broj stepeni slobode.

Koeficijent r_i predstavlja uticaj grube greške i-tog opažanja na i-tu popravku.
Verovatnoća otkrivanja grube greške je veća ukoliko je koeficijent r_i veći.

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- Marginalna gruba greška koja se može otkriti *Data snooping* testom

$$G_i = \frac{\sigma_0 \sqrt{\lambda_0}}{P_i \sqrt{Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i}}}, \sqrt{\lambda_0} \text{ - parametar necentralnosti}$$

$$\sqrt{\lambda_0} = t_{1-\beta_0} + t_{1-\alpha_0/2}$$

$t_{1-\beta_0}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojenu moć testa

$t_{1-\alpha_0/2}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojeni nivo značajnosti

$\sqrt{\lambda_0} = 0.842 + 1.96 = \mathbf{2.802}$, za $1 - \beta_0 = 0.80$ i $\alpha_0 = 0.05$.

Marginalna greška G_i predstavlja vrednost grube greške koja se može otkriti *Data snooping* testom, pod pretpostavkom postojanja samo jedne grube greške.