

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 3
- VEŽBA 1 -

NOVI SAD, 2025

Izravnanje po metodi posrednih merenja

- Gaus-Markovljev model izravnjanja

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f} \quad - \text{funkcionalni model}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad - \text{stohastički model}$$

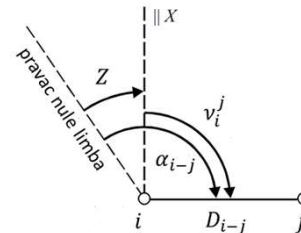
- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima.

Funkcionalni model

- Funkcije veze

$$\alpha_{i-j} + v_{\alpha_{i-j}} = \arctan\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right) + Z \quad - \text{horizontalni pravci}$$

$$D_{i-j} + v_{D_{i-j}} = \sqrt{(Y_j - Y_i)^2 + (X_j - X_i)^2} \quad - \text{horizontalne dužine}$$



- Funkcije veze linearizuju se razvojem u Tejlorov red u okolini približnih vrednosti nepoznatih parametara, nakon čega se dobijaju jednačine popravaka:

$$v_{\alpha_{i-j}} = a_{ij} \cdot dX_i + b_{ij} \cdot dY_i + a_{ji} \cdot dX_j + b_{ji} \cdot dY_j + dZ + f_{\alpha_{i-j}}$$

$$v_{D_{i-j}} = A_{ij} \cdot dX_i + B_{ij} \cdot dY_i + A_{ji} \cdot dX_j + B_{ji} \cdot dY_j + f_{D_{i-j}}$$

Funkcionalni model

- Slobodni članovi

$$f_{\alpha_{i-j}} = \alpha_{i-j}^0 - \alpha_{i-j}, \quad \alpha_{i-j}^0 = v_i^j + Z_0, \quad v_i^j = \arctan\left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{X_j^0 - X_i^0}\right)$$

$$f_{D_{i-j}} = D_{i-j}^0 - D_{i-j}, \quad D_{i-j}^0 = \sqrt{(Y_j^0 - Y_i^0)^2 + (X_j^0 - X_i^0)^2}$$

$Y_j^0, Y_i^0, X_j^0, X_i^0, Z_0$ - približne vrednosti nepoznatih parametara

- Koeficijenti

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha_{i-j}}{\partial X_i}\right)_0 = \frac{\rho'' \sin v_i^j}{D_{i-j}^0}, \quad b_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha_{i-j}}{\partial Y_i}\right)_0 = -\frac{\rho'' \cos v_i^j}{D_{i-j}^0}, \quad \rho'' = 206265$$

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial D_{i-j}}{\partial X_i}\right)_0 = -\cos v_i^j, \quad B_{ij} = \left(\frac{\partial D_{i-j}}{\partial Y_i}\right)_0 = -\sin v_i^j$$

Funkcionalni model

• Primer – dvodimenzionalna geodetska mreža

Za potrebe izgradnje objekta uspostavljena je dvodimenzionalna geodetska mreža koja se sastoji od 4 tačke. U mreži su mereni horizontalni pravci u dva girusa i dužina sa dva ponavljanja. Standard merenja pravaca iznosi 2", a horizontalnih dužina 2 mm + 2ppm. Izravnati rezultate merenja po funkcionalnom i stohastičkom modelu posrednog izravnjanja,

- Kada je datum definisan na klasičan način tačkama 1 i 3 (Y_1, X_1 i Y_3);
- Minimalnim tragom kofaktorske matrice Q_X za tačke 2 i 4.

Jednačine popravaka:

$$v_{\alpha_{1-2}} = a_{12} \cdot dX_1 + b_{12} \cdot dY_1 + a_{21} \cdot dX_2 + b_{21} \cdot dY_2 + dZ_1 + f_{\alpha_{1-2}}$$

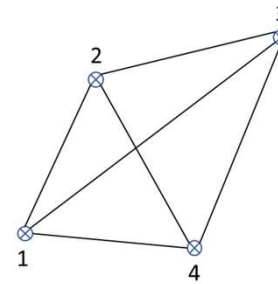
⋮

$$v_{\alpha_{2-3}} = a_{23} \cdot dX_2 + b_{23} \cdot dY_2 + a_{32} \cdot dX_3 + b_{32} \cdot dY_3 + dZ_2 + f_{\alpha_{2-3}}$$

$$v_{D_{1-2}} = A_{12} \cdot dX_1 + B_{12} \cdot dY_1 + A_{21} \cdot dX_2 + B_{21} \cdot dY_2 + f_{D_{1-2}}$$

⋮

$$v_{D_{4-3}} = A_{34} \cdot dX_3 + B_{34} \cdot dY_3 + A_{43} \cdot dX_4 + B_{43} \cdot dY_4 + f_{D_{4-3}}$$



Funkcionalni model

• Primer – dvodimenzionalna geodetska mreža

Formiranje matrice dizajna A :

$$A = \begin{bmatrix} dY_1 & dX_1 & dY_2 & dX_2 & dY_3 & dX_3 & dY_4 & dX_4 & dZ_1 & dZ_2 \\ b_{12} & a_{12} & b_{21} & a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_{13} & a_{13} & 0 & 0 & b_{31} & a_{31} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_{14} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{41} & a_{41} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_{24} & a_{24} & 0 & 0 & b_{42} & a_{42} & 0 & 1 \\ b_{12} & a_{12} & b_{21} & a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b_{23} & a_{23} & b_{32} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B_{12} & A_{12} & B_{21} & A_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{13} & A_{13} & 0 & 0 & B_{31} & A_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{14} & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{41} & A_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{24} & A_{24} & 0 & 0 & B_{42} & A_{42} & 0 & 0 \\ B_{12} & A_{12} & B_{21} & A_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} & A_{23} & B_{32} & A_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{34} & A_{34} & B_{43} & A_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{34} & A_{34} & B_{43} & A_{43} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_{\alpha_{1-2}} \\ f_{\alpha_{1-3}} \\ f_{\alpha_{1-4}} \\ f_{\alpha_{2-4}} \\ f_{\alpha_{2-1}} \\ f_{\alpha_{2-3}} \\ f_{D_{1-2}} \\ f_{D_{1-3}} \\ f_{D_{1-4}} \\ f_{D_{2-4}} \\ f_{D_{2-1}} \\ f_{D_{2-3}} \\ f_{D_{3-4}} \\ f_{D_{4-3}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{\alpha_{1-2}} &= (v_1^2 + Z_1^0) - \alpha_{1-2} & Z_{1,1} &= \alpha_{1-2} - v_1^2 \\ f_{\alpha_{1-3}} &= (v_1^3 + Z_1^0) - \alpha_{1-3} & Z_{1,2} &= \alpha_{1-3} - v_1^3 \\ f_{\alpha_{1-4}} &= (v_1^4 + Z_1^0) - \alpha_{1-4} & Z_{1,3} &= \alpha_{1-4} - v_1^4 \\ & & Z_1^0 &= \frac{Z_{1,1} + Z_{1,2} + Z_{1,3}}{3} \\ f_{\alpha_{2-4}} &= (v_2^4 + Z_2^0) - \alpha_{2-4} & Z_{2,1} &= \alpha_{2-4} - v_2^4 \\ f_{\alpha_{2-1}} &= (v_2^1 + Z_2^0) - \alpha_{2-1} & Z_{2,2} &= \alpha_{2-1} - v_2^1 \\ f_{\alpha_{2-3}} &= (v_2^3 + Z_2^0) - \alpha_{2-3} & Z_{2,3} &= \alpha_{2-3} - v_2^3 \\ & & Z_2^0 &= \frac{Z_{2,1} + Z_{2,2} + Z_{2,3}}{3} \\ f_{D_{1-2}} &= D_{1-2}^0 - D_{1-2} \\ &\vdots \\ f_{D_{4-3}} &= D_{4-3}^0 - D_{4-3} \end{aligned}$$

Stohastički model

• Primer – dvodimenzionalna geodetska mreža

Računanje standardnih devijacija pravaca i dužina:

$$\sigma_{\alpha_{i-j}} = 2'' \quad \sigma_{D_{i-j}} = 2 \text{ mm} + \frac{2 \text{ mm}}{\text{km}} D_{i-j} [\text{km}]$$

$$\sigma_{\alpha_{i-j}} = \frac{\sigma_{\alpha_{i-j}}}{\sqrt{G}}, G - \text{ broj girusa} \quad \sigma_{D_{i-j}} = \frac{\sigma_{D_{i-j}}}{\sqrt{P}}, P - \text{ broj ponavljanja}$$

Homogenizacija težina:

Za σ_0 usvojiti vrednost 1!

$$P_{\alpha_{i-j}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\alpha_{i-j}}^2}$$

$$P_{D_{i-j}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{D_{i-j}}^2}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{\alpha_{1-2}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & P_{\alpha_{2-3}} & & & \\ & & & P_{D_{1-2}} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & P_{D_{4-3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1-2} \\ \vdots \\ \alpha_{2-3} \\ D_{1-2} \\ \vdots \\ D_{4-3} \end{bmatrix}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

• Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

• Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1} \text{ ili } \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{+}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:

$$\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T \mathbf{P} \mathbf{f} + \mathbf{n}^T \hat{\mathbf{x}}$$

• Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f} \quad f = n - u + d, \quad n - \text{ broj merenja, } u - \text{ broj nepoznatih parametara, } d - \text{ defekt mreže}$$

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Kod slobodnih geodetskih mreža matrica dizajna $\mathbf{A}$ ima nepotpun rang $r(\mathbf{A}) = r < u$, tj. broj njenih linearno nezavisnih kolona je manji od broja nepoznatih parametara u . U tom slučaju matrica koeficijenata normalnih jednačina $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ je singularna, jer je $\det(\mathbf{N}) = 0$.
- Veličina $d = u - r$ predstavlja defekt datuma geodetske mreže. Defekt datuma geodetske mreže jeste broj nedostajućih datumskih parametara.
- Datum geodetske mreže čine parametri koji definišu koordinatni sistem, odnosno parametri koji su neophodni za definisanje geodetske mreže po obliku, položaju i veličini.

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Defekt datuma geodetske mreže zavisi od vrste merenih veličina u geodetskoj mreži.

Merene veličine	Datumski parametri			
	Translacije		Rotacija	Razmera
	t_Y	t_X	r_Z	s
Dužine	×	×	×	✓
Pravci	×	×	×	×
Uglovi	×	×	×	×
Azimuti	×	×	✓	×
GNSS 2D vektori	×	×	✓	✓

Klasičan način definisanja datuma geodetske mreže

- Kod klasičnog načina definisanja datuma fiksira se neophodan (minimalan) broj koordinata tačaka/repera mreže.

- Primer – dvodimenzionalna geodetska mreža**

U mreži je planirano merenje pravaca i dužina, pa defekt datuma geodetske mreže iznosi 3 (definisana je razmera geodetske mreže). Shodno tome, fiksiramo koordinate Y_1 , X_1 i Y_3 .

Matrica datumskih uslova:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} dY_1 & dX_1 & dY_2 & dX_2 & dY_3 & dX_3 & dY_4 & dX_4 & dZ_1 & dZ_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_Y \\ t_X \\ r_Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^- & (\mathbf{R}^-)^T \\ \mathbf{R}^- & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^-$$

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Kod ovog načina definisanja datuma sve tačke mreže koje učestvuju u definiciji datuma imaju jednak tretman.

Matrica datumskih uslova formira se na sledeći način:

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} dY_1 & dX_1 & dY_2 & dX_2 & dY_3 & dX_3 & dY_4 & dX_4 & dZ_1 & dZ_2 \\ 1/\sqrt{m} & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 0 \\ -\xi_1 & \eta_1 & -\xi_2 & \eta_2 & -\xi_3 & \eta_3 & -\xi_4 & \eta_4 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \xi_1 & \eta_2 & \xi_2 & \eta_3 & \xi_3 & \eta_4 & \xi_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_Y \\ t_X \\ r_Z \\ s \end{bmatrix}$$

Kontrola računanja:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{E},$$

gde je $\mathbf{E}$ jedinična matrica.

$$\xi_i = \frac{X_i - \bar{X}_0}{g}, \eta_i = \frac{Y_i - \bar{Y}_0}{g}$$

$$\bar{X}_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \bar{Y}_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$$

$$g = \sqrt{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_0)^2 + \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_0)^2}$$

m – broj tačaka koje učestvuju u definiciji datuma geodetske mreže

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $Q_{\hat{x}}$ za deo tačaka mreže

Datum mreže definišu tačke 2 i 4. Budući da je u mreži planirano merenje pravaca i dužina, definisana je razmera geodetske mreže, pa matrica datumskih uslova ima sledeći oblik:

$$B^T = \begin{bmatrix} dY_1 & dX_1 & dY_2 & dX_2 & dY_3 & dX_3 & dY_4 & dX_4 & dZ_1 & dZ_2 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & \eta_2 & 0 & 0 & -\xi_4 & \eta_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_Y \\ t_X \\ r_Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N & B^T \\ B^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N^+ & (B^+)^T \\ B^+ & 0 \end{bmatrix} \quad Q_{\hat{x}} = N^+$$

Globlani test na grube greške

- Hipoteze

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ protiv } H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

pri čemu je $\sigma^2 = M(m_0^2)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha, f, \infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha, f, \infty} \rightarrow \text{FINV}(\alpha, f, 10000)$

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha, f, \infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha, f, \infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Definitivna kontrola izravnjanja

Izravnote koordinate:

$$\hat{Y}_i = Y_i^0 + dY_i$$

$$\hat{X}_i = X_i^0 + dX_i$$

$$\hat{Z} = Z_0 + dZ$$

Merene veličine iz izravnatih koordinata:

$$\hat{\alpha}_{i-j} = \hat{\nu}_i^j + \hat{Z}, \quad \hat{\nu}_i^j = \arctan\left(\frac{\hat{Y}_j - \hat{Y}_i}{\hat{X}_j - \hat{X}_i}\right)$$

$$\hat{D}_{i-j} = \sqrt{(\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2 + (\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2}$$

Kontrola izravnjanja:

$$u_{\alpha_{i-j}} = \hat{\alpha}_{i-j} - \alpha_{i-j}$$

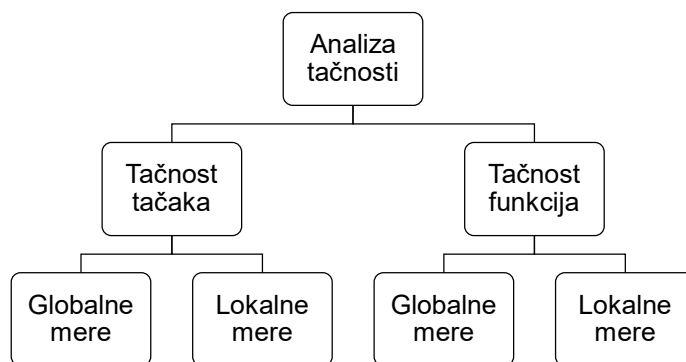
$$u_{D_{i-j}} = \hat{D}_{i-j} - D_{i-j}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\alpha_{i-j}} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{D_{i-j}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Na ovaj način se kontrolišu sve moguće greške u postupku izravnjanja.

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Ocena tačnosti može biti globalna ako se određuje jedna vrednost kao reprezent za ceo skup veličina u geodetskoj mreži ili lokalna ocena tačnosti ako se ona odnosi na pojedine veličine.



Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Standardne devijacije koordinata tačaka

$$\hat{\sigma}_{Y_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i}}, \quad \hat{\sigma}_{X_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i}}$$

m_0 - a posteriori standardna devijacija

$Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i}, Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{Y}_1 \hat{Y}_1} & Q_{\hat{Y}_1 \hat{X}_1} & \dots & \dots \\ Q_{\hat{X}_1 \hat{Y}_1} & Q_{\hat{X}_1 \hat{X}_1} & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & Q_{\hat{Y}_m \hat{Y}_m} & Q_{\hat{Y}_m \hat{X}_m} \\ & & & Q_{\hat{X}_m \hat{Y}_m} & Q_{\hat{X}_m \hat{X}_m} \end{bmatrix}$$

- Standardne devijacije položaja tačaka

$$\hat{\sigma}_{P_i} = \sqrt{\hat{\sigma}_{Y_i}^2 + \hat{\sigma}_{X_i}^2}$$

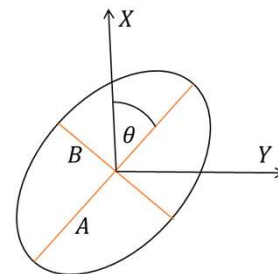
Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Elementi apsolutnih elipsi grešaka

$$\lambda_{1,i} = \frac{1}{2}(Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i} + Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i} + k), \quad \lambda_{2,i} = \frac{1}{2}(Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i} + Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i} - k)$$

$$k = \sqrt{(Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i} - Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i})^2 + 4Q_{\hat{X}_i \hat{Y}_i}^2}$$

$$A_i = \sigma_0 \sqrt{\lambda_{1,i} \cdot \chi_{1-\alpha,f}^2}, \quad B_i = \sigma_0 \sqrt{\lambda_{2,i} \cdot \chi_{1-\alpha,f}^2}$$



$\chi_{1-\alpha,f}^2$ - kvantil χ^2 raspodele za nivo značajnosti α i broj stepeni slobode f

Za α usvojiti vrednost 0.05, broj stepeni slobode f iznosi 2 jer kod 2D mreža tačke imaju dve koord.

$\chi_{0.95,2}^2 = 5.99$, za $\alpha = 0.05$ i $f = 2$.

Excel: $\chi_{1-\alpha,f}^2 \rightarrow \text{CHIINV}(\alpha, f)$

Analiza tačnosti geodetskih mreža

$$\theta_i = \frac{1}{2} \left(\arctan \left(\frac{2Q_{\hat{x}_i \hat{y}_i}}{Q_{\hat{x}_i \hat{x}_i} - Q_{\hat{y}_i \hat{y}_i}} \right) + KV \right)$$

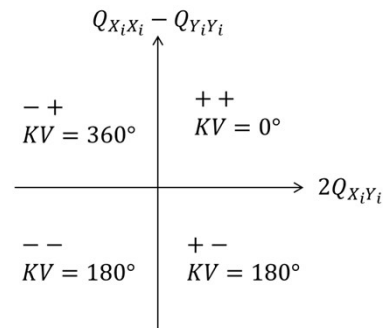
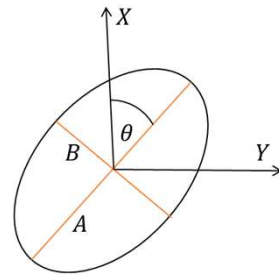
Primer:

$$2Q_{\hat{x}_i \hat{y}_i} = -2$$

$$Q_{\hat{x}_i \hat{x}_i} - Q_{\hat{y}_i \hat{y}_i} = -2$$

$$KV = 180^\circ$$

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\arctan \left(\frac{-2}{-2} \right) + KV \right) = \frac{1}{2} (45^\circ + 180^\circ)$$



Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Standardne devijacija izravnatih merenih veličina

$$\hat{\sigma}_{l_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}}$$

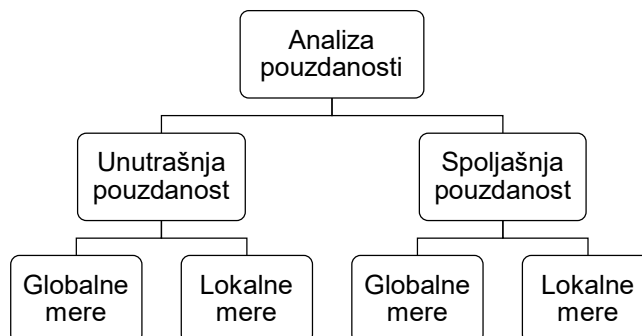
m_0 - *a posteriori* standardna devijacija

$Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{l}}$

$\mathbf{Q}_{\hat{l}} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{x}} \mathbf{A}^T$ - kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

Analiza pouzdanosti geodetskih mreža

- Pouzdanost geodetske mreže predstavlja kvalitet predloženog rešenja sa aspekta mogućnosti otkrivanja grubih grešaka u merenjima (unutrašnja pouzdanost), i sa aspekta uticaja neotkrivenih grubih grešaka na ocene traženih veličina (spoljašnja pouzdanost).



Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- Koeficijenti unutrašnje pouzdanosti

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T$ - kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ - kofaktorska matrica popravaka merenih veličina

$$r_i = Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i} \cdot P_i$$

$Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i}$ – i -ti dijagonalni element matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$

P_i – i -ti dijagonalni element matrice težina $\mathbf{P}$

Kontrola:

$$\sum r_i = f,$$

$f = n - u + d$ – broj stepeni slobode.

Koeficijent r_i predstavlja uticaj grube greške i -tog opažanja na i -tu popravku.

Verovatnoća otkrivanja grube greške je veća ukoliko je koeficijent r_i veći.

$r_i < 0.3$ – nepouzdanano merenje, $r_i \geq 0.3$ – pouzdano merenje

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- **Marginalna gruba greška koja se može otkriti *Data snooping* testom**

$$G_i = \frac{m_0 \sqrt{\lambda_0}}{P_i \sqrt{Q \hat{v}_i \hat{v}_i}}, \sqrt{\lambda_0} - \text{parametar necentralnosti}$$

$$\sqrt{\lambda_0} = t_{1-\beta_0} + t_{1-\alpha_0/2}$$

$t_{1-\beta_0}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojenu moć testa

$t_{1-\alpha_0/2}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojeni nivo značajnosti

$$\sqrt{\lambda_0} = 0.842 + 1.96 = \mathbf{2.802}, \text{ za } 1 - \beta_0 = 0.80 \text{ i } \alpha_0 = 0.05.$$

Marginalna greška G_i predstavlja vrednost grube greške koja se može otkriti *Data snooping* testom, pod pretpostavkom postojanja samo jedne grube greške.

Transformacija rešenja

- Transformacija rešenja iz datuma definisanog na klasičan način u datum definisan minimalnim tragom

$$\hat{\mathbf{x}}_{trans} = \mathbf{N}^+ \mathbf{N} \tilde{\mathbf{x}}$$

$\tilde{\mathbf{x}}$ - vektor nepoznatih parametara iz klasičnog načina definisanja datuma

$$\text{Kontrola: } \hat{\mathbf{x}}_{trans} - \hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{0}$$

- Transformacija rešenja iz datuma definisanog minimalnim tragom u datum definisan na klasičan način

$$\tilde{\mathbf{x}}_{trans} = \mathbf{N}^- \mathbf{N} \hat{\mathbf{x}}$$

$\hat{\mathbf{x}}$ - vektor nepoznatih parametara iz rešenja kada datum definisan min. tragom

$$\text{Kontrola: } \tilde{\mathbf{x}}_{trans} - \tilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{0}$$