

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 3
- VEŽBA 6 -

NOVI SAD, 2025

Izravnanje po metodi posrednih merenja

- Gaus-Markovljev model izravnjanja

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f} \quad - \text{funkcionalni model}$$

$$\mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_l, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad - \text{stohastički model}$$

- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima.

Funkcionalni model

- Funkcije veze – GNSS bazni vektori

$$\Delta \hat{X}_{ij} = \Delta X_{ij} + v_{\Delta X_{ij}} = \hat{X}_j - \hat{X}_i = F_1(\hat{X}_i, \hat{X}_j), \quad \hat{X}_i = X_i^0 + dX_i$$

$$\Delta \hat{Y}_{ij} = \Delta Y_{ij} + v_{\Delta Y_{ij}} = \hat{Y}_j - \hat{Y}_i = F_2(\hat{Y}_i, \hat{Y}_j), \quad \hat{Y}_i = Y_i^0 + dY_i$$

$$\Delta \hat{Z}_{ij} = \Delta Z_{ij} + v_{\Delta Z_{ij}} = \hat{Z}_j - \hat{Z}_i = F_3(\hat{Z}_i, \hat{Z}_j), \quad \hat{Z}_i = Z_i^0 + dZ_i$$

- Jednačine popravaka

$$v_{\Delta X_{ij}} = dX_j - dX_i + f_{\Delta X_{ij}}, \quad f_{\Delta X_{ij}} = (X_j^0 - X_i^0) - \Delta X_{ij}$$

$$v_{\Delta Y_{ij}} = dY_j - dY_i + f_{\Delta Y_{ij}}, \quad f_{\Delta Y_{ij}} = (Y_j^0 - Y_i^0) - \Delta Y_{ij}$$

$$v_{\Delta Z_{ij}} = dZ_j - dZ_i + f_{\Delta Z_{ij}}, \quad f_{\Delta Z_{ij}} = (Z_j^0 - Z_i^0) - \Delta Z_{ij}$$

Broj merenja $n = 3 \cdot m$ m – broj GNSS baznih vektora
--

Stohastički model

- Kovarijaciona matrica merenih veličina

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X_1}^2 & \sigma_{\Delta X_1 \Delta Y_1} & \sigma_{\Delta X_1 \Delta Z_1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\Delta Y_1 \Delta X_1} & \sigma_{\Delta Y_1}^2 & \sigma_{\Delta Y_1 \Delta Z_1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\Delta Z_1 \Delta X_1} & \sigma_{\Delta Z_1 \Delta Y_1} & \sigma_{\Delta Z_1}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\Delta X_m}^2 & \sigma_{\Delta X_m \Delta Y_m} & \sigma_{\Delta X_m \Delta Z_m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\Delta Y_m \Delta X_m} & \sigma_{\Delta Y_m}^2 & \sigma_{\Delta Y_m \Delta Z_m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\Delta Z_m \Delta X_m} & \sigma_{\Delta Z_m \Delta Y_m} & \sigma_{\Delta Z_m}^2 \end{bmatrix}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^- \text{ ili } \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^+$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:

$$\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{K}_l^{-1} \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{f} + \mathbf{n}^T \hat{\mathbf{x}}$$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{K}_l^{-1} \hat{\mathbf{v}}}{f} \quad f = n - u + d, \quad n = 3 \cdot m - \text{broj merenja}, \quad u - \text{broj nepoznatih parametara}, \\ d - \text{defekt mreže}$$

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Kod slobodnih geodetskih mreža matrica dizajna $\mathbf{A}$ ima nepotpun rang $r(\mathbf{A}) = r < u$, tj. broj njenih linearno nezavisnih kolona je manji od broja nepoznatih parametara u . U tom slučaju matrica koeficijenata normalnih jednačina $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{A}$ je singularna, jer je $\det(\mathbf{N}) = 0$.
- Veličina $d = u - r$ predstavlja defekt datuma geodetske mreže. Defekt datuma geodetske mreže jeste broj nedostajućih datumskih parametara.
- Datum geodetske mreže čine parametri koji definišu koordinatni sistem, odnosno parametri koji su neophodni za definisanje geodetske mreže po obliku, položaju i veličini.

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Defekt datuma geodetske mreže zavisi od vrste merenih veličina u geodetskoj mreži.

Merene veličine	Datumski parametri						
	Translacije			Rotacije			Razmera
	t_X	t_Y	t_Z	r_X	r_Y	r_Z	
Kose dužine	×	×	×	×	×	×	✓
Horzin. pravci	×	×	×	×	×	×	×
Horzin. uglovi	×	×	×	×	×	×	×
Azimuti	×	×	×	×	×	✓	×
GNSS 2D vektori	×	×	×	×	×	✓	✓
GNSS 3D vektori	×	×	×	✓	✓	✓	✓
Zenitni uglovi	×	×	×	✓	✓	×	×
Visinske razlike	×	×	×	✓	✓	×	✓

Klasičan način definisanja datuma geodetske mreže

- Kod klasičnog načina definisanja datuma fiksira se neophodan (minimalan) broj koordinata tačaka mreže.

Budući da su u mreži mereni GNSS 3D bazni vektori, defekt datuma geodetske mreže iznosi 3 (definisane su rotacije oko koordinatnih osa i razmera). Shodno tome, fiksiramo koordinate X_1 , Y_1 i Z_1 .

Matrica datumskih uslova:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} dX_1 & dY_1 & dZ_1 & dX_2 & dY_2 & dZ_2 & dX_m & dY_m & dZ_m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^- & (\mathbf{R}^-)^T \\ \mathbf{R}^- & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{N}^-$$

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $Q_{\hat{x}}$

- Kod ovog načina definisanja datuma sve tačke mreže koje učestvuju u definiciji datuma imaju jednak tretman.

Matrica datumskih uslova formira se na sledeći način:

$$B^T = \begin{bmatrix} dX_1 & dY_1 & dZ_1 & dX_2 & dY_2 & dZ_2 & \dots & dX_m & dY_m & dZ_m \\ \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \begin{matrix} t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{matrix}$$

Kontrola računanja:

$$B^T B = E.$$

$$\begin{bmatrix} N & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N^+ & (B^+)^T \\ B^+ & 0 \end{bmatrix} \quad Q_{\hat{x}} = N^+$$

m – broj tačaka koje učestvuju u definiciji datuma geodetske mreže

Globalni test na grube greške

- Hipoteze

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ protiv } H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

pri čemu je $\sigma^2 = M(m_0^2)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha, f, \infty}$$

$$\text{Excel: } F_{1-\alpha, f, \infty} \rightarrow \text{FINV}(\alpha, f, 10000)$$

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha, f, \infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha, f, \infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Definitivna kontrola izravnjanja

Izravnate koordinate:

$$\hat{Y}_i = Y_i^0 + dY_i$$

$$\hat{X}_i = X_i^0 + dX_i$$

$$\hat{Z}_i = Z_i^0 + dZ_i$$

Merene veličine iz izravnatih koordinata:

$$\Delta \hat{X}_{ij} = \hat{X}_j - \hat{X}_i$$

$$\Delta \hat{Y}_{ij} = \hat{Y}_j - \hat{Y}_i$$

$$\Delta \hat{Z}_{ij} = \hat{Z}_j - \hat{Z}_i$$

Kontrola izravnjanja:

$$u_{\Delta X_{ij}} = \Delta \hat{X}_{ij} - \Delta X_{ij}$$

$$u_{\Delta Y_{ij}} = \Delta \hat{Y}_{ij} - \Delta Y_{ij}$$

$$u_{\Delta Z_{ij}} = \Delta \hat{Z}_{ij} - \Delta Z_{ij}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\Delta X_{ij}} \\ u_{\Delta Y_{ij}} \\ u_{\Delta Z_{ij}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Standardne devijacije koordinata tačaka

$$\hat{\sigma}_{X_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i}}, \quad \hat{\sigma}_{Y_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i}}, \quad \hat{\sigma}_{Z_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{Z}_i \hat{Z}_i}}$$

m_0 - *a posteriori* standardna devijacija

$Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i}, Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i}, Q_{\hat{Z}_i \hat{Z}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Standardne devijacije tačke u prostoru

$$\hat{\sigma}_{P_i} = \sqrt{\hat{\sigma}_{X_i}^2 + \hat{\sigma}_{Y_i}^2 + \hat{\sigma}_{Z_i}^2}$$

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Standardne devijacije izravnatih merenih veličina

$$\hat{\sigma}_{l_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}}$$

m_0 - *a posteriori* standardna devijacija

$Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{l}}$

$\mathbf{Q}_{\hat{l}} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{x}} \mathbf{A}^T$ - kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- Koeficijenti unutrašnje pouzdanosti

$\mathbf{Q}_{\hat{l}} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{x}} \mathbf{A}^T$ - kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

$\mathbf{Q}_{\hat{v}} = \mathbf{K}_l - \mathbf{Q}_{\hat{l}}$ - kofaktorska matrica popravaka merenih veličina

$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_{\hat{v}} \cdot \mathbf{K}_l^{-1}$ - matrica koeficijenata unutrašnje pouzdanosti

r_i - dijagonalni elementi matrice $\mathbf{R}$

Kontrola:

$$\sum r_i = f,$$

$f = n - u + d$ - broj stepeni slobode.

Koeficijent r_i predstavlja uticaj grube greške i -tog opažanja na i -tu popravku.

Verovatnoća otkrivanja grube greške je veća ukoliko je koeficijent r_i veći.

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- Marginalna gruba greška koja se može otkriti *Data snooping* testom

$$G_i = \frac{\sigma_0 \sqrt{\lambda_0}}{P_i \sqrt{Q \hat{v}_i \hat{v}_i}}, \sqrt{\lambda_0} - \text{parametar necentralnosti}$$

$$\sqrt{\lambda_0} = t_{1-\beta_0} + t_{1-\alpha_0/2}$$

$t_{1-\beta_0}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojenu moć testa

$t_{1-\alpha_0/2}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojeni nivo značajnosti

$$\sqrt{\lambda_0} = 0.842 + 1.96 = \mathbf{2.802}, \text{ za } 1 - \beta_0 = 0.80 \text{ i } \alpha_0 = 0.05.$$

Marginalna greška G_i predstavlja vrednost grube greške koja se može otkriti *Data snooping* testom, pod pretpostavkom postojanja samo jedne grube greške.