

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 2
- ZADATAK 2 -

NOVI SAD, 2026

Projektovanje lokalnih geodetskih mreža

- Projekat geodetske mreže sadrži:
 - Opšti deo;
 - Stručni deo.
- U stručnom delu projekta uglavnom se definišu:
 - Oblik (konfiguracija) mreže i plan opažanja;
 - Metoda i tehnike merenja, instrumenti i pribor za merenje;
 - Kriterijumi za praćenje i kontrolu merenja;
 - Matematički model izravnjanja;
 - Organizacija rada na terenu (broj izvršilaca, oprema itd.);
 - Predmer i predračun radova.

Projektovanje lokalnih geodetskih mreža

- Pošto se utvrdi konfiguracija terena, sagleda raspoloživi instrumentarij sa svojim karakteristikama i izvrši izbor metode merenja, u postupku **prethodne ocene tačnosti i analize pouzdanosti geodetske mreže**, može se odrediti tačnost i pouzdanost buduće geodetske mreže i njen odnos prema kriterijuma kvaliteta koji su definisani u okviru projektnog zadatka.

Prethodna ocena tačnosti i analiza pouzdanosti geodetske mreže

- Gaus-Markovljev model izravnjanja

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f} \quad - \text{funkcionalni model}$$

$$\mathbf{P}_l = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad - \text{stohastički model}$$

- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima

Funkcionalni model

- Jednačine popravaka

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \Delta h_{i-j} + v_{\Delta h_{i-j}} \quad (1)$$

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \widehat{H}_j - \widehat{H}_i \quad (2)$$

Na osnovu izraza (1) i (2) može se napisati:

$$v_{\Delta h_{i-j}} = (\widehat{H}_j - \widehat{H}_i) - \Delta h_{i-j}, \quad \widehat{H}_j = H_j^0 + dH_j \quad \widehat{H}_i = H_i^0 + dH_i,$$

$$v_{\Delta h_{i-j}} = H_j^0 + dH_j - H_i^0 - dH_i - \Delta h_{i-j},$$

a onda:

$$v_{\Delta h_{i-j}} = dH_j - dH_i + f_{\Delta h_{i-j}}, \quad f_{\Delta h_{i-j}} = (H_j^0 - H_i^0) - \Delta h_{i-j}.$$

Funkcionalni model

- Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža

Za potrebe praćenja izgradnje objekta, projektovana je jednodimenzionalna geodetska mreža. Merenja u mreži potrebno realizovati metodom geometrijskog nivelmana u zatvorenim nivelmanskim vlakovima. Standard merenja visinskih razlika iznosi 1 mm/km. Na osnovu definisanog plana opažanja potrebno je sprovesti postupak prethodne ocene tačnosti i analize pouzdanosti:

- Kada je datum definisan na klasičan način reperom 1 (H_1);
- Kada je datum definisan minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$;
- Kada je datum fiksiran reperima 1 i 2 (neslobodna mreža).

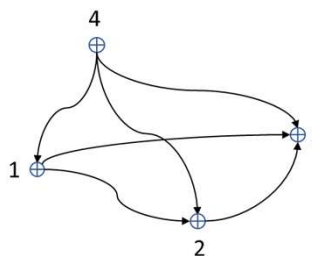
Jednačine popravaka:

$$v_{\Delta h_{1-2}} = dH_2 - dH_1 + f_{\Delta h_{1-2}}, \quad f_{\Delta h_{1-2}} = (H_2^0 - H_1^0) - \Delta h_{1-2}$$

$$v_{\Delta h_{2-3}} = dH_3 - dH_2 + f_{\Delta h_{2-3}}, \quad f_{\Delta h_{2-3}} = (H_3^0 - H_2^0) - \Delta h_{2-3}$$

⋮

$$v_{\Delta h_{4-3}} = dH_3 - dH_4 + f_{\Delta h_{4-3}}, \quad f_{\Delta h_{4-3}} = (H_3^0 - H_4^0) - \Delta h_{4-3}$$



Formiranje matrice dizajna:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cccc|l} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 & \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & v_{\Delta h_{1-2}} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & v_{\Delta h_{2-3}} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & v_{\Delta h_{1-3}} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & v_{\Delta h_{4-1}} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & v_{\Delta h_{4-2}} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & v_{\Delta h_{4-3}} \end{array}$$

Stohastički model

• Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža

Računanje standardnih devijacija visinskih razlika:

$$\sigma_{\Delta h_{i-j}} = S_{i-j}[\text{km}] \cdot \sigma_{\Delta h}$$

S_{i-j} - dužina nivelmanske strane

$\sigma_{\Delta h}$ [ppm] - standard merenja instrumenta

Homogenizacija težina:

$$P_{\Delta h_{i-j}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{i-j}}^2}$$

Za σ_0 usvojiti vrednost 1!

$$P_{\Delta h_{1-2}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{1-2}}^2}, \dots, P_{\Delta h_{4-3}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{4-3}}^2}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{\Delta h_{1-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\Delta h_{2-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\Delta h_{1-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_{1-2} \\ \Delta h_{2-3} \\ \Delta h_{1-3} \\ \Delta h_{4-1} \\ \Delta h_{4-2} \\ \Delta h_{4-3} \end{bmatrix}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

• Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

• Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:

$$\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T \mathbf{P} \mathbf{f} + \mathbf{n}^T \hat{\mathbf{x}}$$

• Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f} \quad f = n - u + d, \quad n - \text{broj merenja}, \quad u - \text{broj nepoznatih parametara}, \\ d - \text{defekt datuma geodetske mreže}$$

Definisanje datuma geodetskih mreža

- Kod slobodnih geodetskih mreža matrica dizajna \mathbf{A} ima nepotpun rang $r(\mathbf{A}) = r < u$, tj. broj njenih linearno nezavisnih kolona je manji od broja nepoznatih parametara u . U tom slučaju matrica koeficijenata normalnih jednačina $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ je singularna, jer je $\det(\mathbf{N}) = 0$.
- Veličina $d = u - r$ predstavlja defekt datuma geodetske mreže. Defekt datuma geodetske mreže jeste broj nedostajućih datumskih parametara.
- Datum geodetske mreže čine parametri koji definišu koordinatni sistem, odnosno parametri koji su neophodni za definisanje geodetske mreže po obliku, položaju i veličini.
- Defekt datuma geodetske mreže zavisi od vrste merenih veličina u geodetskoj mreži.

| Model geodetske mreže | Merene veličine | Defekt $d = u - r$ | Datumski parametri |
|-----------------------|------------------|--------------------|------------------------|
| 1D | Visinske razlike | 1 | Translacija po H osi |

Klasičan način definisanja datuma geodetske mreže

- Kod klasičnog načina definisanja datuma fiksira se neophodan (minimalan) broj koordinata tačaka/repera mreže.
- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Defekt datuma geodetske mreže je 1, pa je neophodno fiksirati visinu jednog od repera mreže. Fiksiramo visinu H_1 repera 1.

Matrica datumskih uslova:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^- & \mathbf{R}^- \\ (\mathbf{R}^-)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{N}^-$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu
Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 2 - Primer.xlsx.

Definisanje datuma minimalnim tragom kofaktorske matrice $Q_{\hat{x}}$

- Kod ovog načina definisanja datuma sve tačke imaju jednak doprinos definiciji datuma geodetske mreže. Težište mreže predstavlja referentnu tačku mreže.

- Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Matrica datumskih uslova formira se na sledeći način:

$$B^T = \begin{bmatrix} \frac{dH_1}{\sqrt{m}} & \frac{dH_2}{\sqrt{m}} & \frac{dH_3}{\sqrt{m}} & \frac{dH_4}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \quad m - \text{broj repera mreže}$$

Kontrola računanja:

$$B^T B = E,$$

gde je E jedinična matrica.

$$\begin{bmatrix} N & B^+ \\ B^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N^+ & B^+ \\ (B^+)^T & 0 \end{bmatrix} \quad Q_{\hat{x}} = N^+$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu
Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 2 - Primer.xlsx.

Neslobodna geodetska mreža

- Kod neslobodnih geodetskih nedostajući datumski parametri određuju se merenjem. Matrica dizajna A ima potpun rang, pa je matrica koeficijenata normalnih jednačina $N = A^T P A$ regularna, jer je $\det(N) \neq 0$.

- Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Reperi 1 i 2 su dati. Shodno tome, visinska razlika Δh_{1-2} se izbacuje.

U ovom slučaju matrice A i P formiraju se na sledeći način:

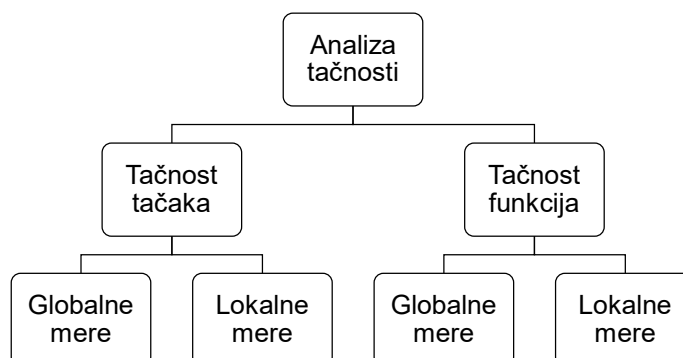
$$A = \begin{bmatrix} \frac{dH_3}{\sqrt{m}} & \frac{dH_4}{\sqrt{m}} \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_{\Delta h_{2-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\Delta h_{1-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_{2-3} \\ \Delta h_{1-3} \\ \Delta h_{4-1} \\ \Delta h_{4-2} \\ \Delta h_{4-3} \end{bmatrix}$$

$$N = A^T P A \quad Q_{\hat{x}} = N^{-1}$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu
Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 2 - Primer.xlsx.

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Ocena tačnosti može biti globalna ako se određuje jedna vrednost kao reprezent za ceo skup veličina u geodetskoj mreži ili lokalna ocena tačnosti ako se ona odnosi na pojedine veličine.



Lokalne mere tačnosti

- **Standardne devijacije visina repera**

$$\hat{\sigma}_{H_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{H}_i}}$$

σ_0 - *a priori* standardna devijacija

$Q_{\hat{H}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{H}_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & Q_{\hat{H}_m} \end{bmatrix}$$

- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

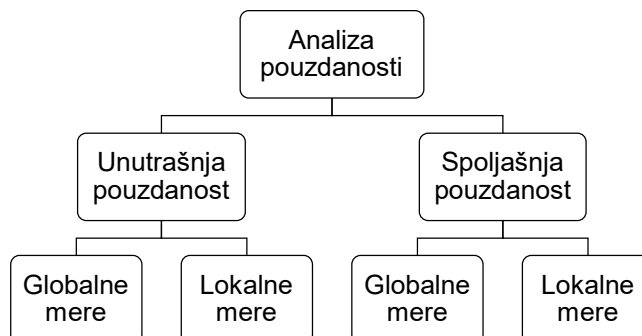
$$\hat{\sigma}_{H_1} = 1 \cdot \sqrt{Q_{\hat{H}_1}}$$

⋮

$$\hat{\sigma}_{H_4} = 1 \cdot \sqrt{Q_{\hat{H}_4}}$$

Analiza pouzdanosti geodetskih mreža

- Pouzdanost geodetske mreže predstavlja kvalitet predloženog rešenja sa aspekta mogućnosti otkrivanja grubih grešaka u merenjima (unutrašnja pouzdanost), i sa aspekta uticaja neotkrivenih grubih grešaka na ocene traženih veličina (spoljašnja pouzdanost).



Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

• Koeficijenti unutrašnje pouzdanosti

$Q_{\hat{x}} = A Q_{\hat{y}} A^T$ – kofaktorska matrica izravnatih merenih veličina

$Q_{\hat{v}} = P^{-1} - Q_{\hat{x}}$ – kofaktorska matrica popravaka merenih veličina

$$r_i = Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i} \cdot P_i$$

$Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i}$ – i -ti dijagonalni element matrice $Q_{\hat{v}}$

P_i – i -ti dijagonalni element matrice težina P

Kontrola:

$$\sum r_i = f,$$

$f = n - u + d$ – broj stepeni slobode.

Koeficijent r_i predstavlja uticaj grube greške i -tog opažanja na i -tu popravku.

Verovatnoća otkrivanja grube greške je veća ukoliko je koeficijent r_i veći.

$r_i < 0.3$ – nepouzdanost merenje, $r_i \geq 0.3$ – pouzdano merenje

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- **Marginalna gruba greška koja se može otkriti *Data snooping* testom**

$$G_i = \frac{\sigma_0 \sqrt{\lambda_0}}{P_i \sqrt{Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i}}}, \sqrt{\lambda_0} - \text{parametar necentralnosti}$$

$$\sqrt{\lambda_0} = t_{1-\beta_0} + t_{1-\alpha_0/2}$$

$t_{1-\beta_0}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojenu moć testa

$t_{1-\alpha_0/2}$ - kvantil studentovog rasporeda za usvojeni nivo značajnosti

$$\sqrt{\lambda_0} = 0.842 + 1.96 = \mathbf{2.802}, \text{ za } 1 - \beta_0 = 0.80 \text{ i } \alpha_0 = 0.05.$$

Marginalna greška G_i predstavlja vrednost grube greške koja se može otkriti *Data snooping* testom, pod pretpostavkom postojanja samo jedne grube greške.

Unutrašnja pouzdanost geodetskih mreža

- **Primer – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Koeficijenti unutrašnje pouzdanosti:

$$r_1 = Q_{\hat{v}_1 \hat{v}_1} \cdot P_{\Delta h_{1-2}}$$

⋮

$$r_6 = Q_{\hat{v}_6 \hat{v}_6} \cdot P_{\Delta h_{4-3}}$$

Marginalne grube greške G_i :

$$G_1 = \frac{1 \cdot 2.802}{P_{\Delta h_{1-2}} \sqrt{Q_{\hat{v}_1 \hat{v}_1}}}$$

⋮

$$G_6 = \frac{1 \cdot 2.802}{P_{\Delta h_{4-3}} \sqrt{Q_{\hat{v}_6 \hat{v}_6}}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{v}_1 \hat{v}_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & Q_{\hat{v}_6 \hat{v}_6} \end{bmatrix}$$

ZADATAK 2

- Formirati matrice **A** i **P** na osnovu definisanog plana opažanja i usvojene tačnosti planiranih merenja. Dužine nivelmanskih strana sračunati iz približnih koordinata tačaka datih u prvom zadatku.
- Datum geodetske mreže definisati:
 - a) Na klasičan način;
 - b) Minimalnim tragom kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$;
 - c) Fiksiranjem repera 1, 2 i 3 (neslobodna mreža).
- Sračunati prethodno navedene parametre tačnosti za sva tri rešenja.
- Sračunati prethodno navedene parametre unutrašnje pouzdanosti za sva tri rešenja.

ZADATAK 2

- Proveriti da li su ispunjeni kriterijumi definisani u okviru projektnog zadatka:
 1. $\hat{\sigma}_{H_i} < 0.4 \text{ mm}$
 2. $r_i \geq 0.3$
 3. $|G_i| < 3\sigma_0$