

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 2
- ZADATAK 4 -

NOVI SAD, 2025

Funkcionalni model posrednog izravnjanja

- Funkcionalni model definiše matematičku vezu između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.

Jednačina ravni:

$$Z_i' = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i$$

$$Z_i + V_i = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i$$

Jednačine popravaka:

$$V_i = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i - Z_i$$

Z_i' - izravnata vrednost merene veličine

Z_i - merena veličina (visina)

λ - odsečak na Z osi

μ_1, μ_2 - koeficijenti pravca po koordinatnim osama

Funkcionalni i stohastički model

- Funkcionalni model posrednog izravnjanja u matričnom obliku:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

Matrica dizajna \mathbf{A} i vektor slobodnih članova \mathbf{f} formiraju se na sledeći način:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z}{\partial \mu_1} & \frac{\partial Z}{\partial \mu_2} \\ 1 & -Y_1 & -X_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -Y_n & -X_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -Z_1 \\ \vdots \\ -Z_n \end{bmatrix}$$

- Stohastički model posrednog izravnjanja

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Matrica težina \mathbf{P} formira se na sledeći način:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}, \mathbf{E} - \text{jedinična matrica (sva merenja su homogene tačnosti).}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Analiza tačnosti

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}}}{n - u}},$$

gdje je n broj merenja, a u broj nepoznatih parametara.

- Standardne devijacije nepoznatih parametara (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_\lambda = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\lambda\lambda}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_1} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_1\mu_1}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_2} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_2\mu_2}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\lambda\lambda} & Q_{\lambda\mu_1} & Q_{\lambda\mu_2} \\ Q_{\mu_1\lambda} & Q_{\mu_1\mu_1} & Q_{\mu_1\mu_2} \\ Q_{\mu_2\lambda} & Q_{\mu_2\mu_1} & Q_{\mu_2\mu_2} \end{bmatrix}$$

Primer 1

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu
Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 4 - Primer.xlsx.

Građevinski blok potrebno je visinski urediti pre izgradnje industrijskih objekata, tako da se sa minimalnim radovima na korekciji prirodnog reljefa postigne efikasno odvodnjavanje terena gravitacijom.

X \ Y	0	10	20
0	100.300	100.005	100.003
10	100.167	100.000	100.600
20	100.170	100.160	100.154

- Matrica dizajna \mathbf{A} , vektor slobodnih članova \mathbf{f} i matrica težina \mathbf{P}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -20 \\ 1 & -10 & 0 \\ 1 & -10 & -10 \\ 1 & -10 & -20 \\ 1 & -20 & 0 \\ 1 & -20 & -10 \\ 1 & -20 & -20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -100.300 \\ -100.167 \\ -100.170 \\ -100.005 \\ -100.000 \\ -100.160 \\ -100.003 \\ -100.600 \\ -100.154 \end{bmatrix}$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu
Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 4 - Primeri.xlsx.