FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 2
- ZADATAK 4 -

NOVI SAD, 2026

Funkcionalni model posrednog izravnanja

- Funkcionalni model definiše matematičku vezu između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.

Jednačina ravni:

$$Z_i{}' = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i$$

$$Z_i + V_i = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i$$

Jednačine popravaka:

$$V_i = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i - Z_i$$

$Z_i{}'$ - izravnata vrednost merene veličine

Z_i - merena veličina (visina)

λ - odsečak na Z osi

μ_1, μ_2 - koeficijenti pravca po koordinatnim osama

Funkcionalni i stohastički model

- Funkcionalni model posrednog izravnanja u matričnom obliku:

  $\mathbf{V} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}$

  Matrica dizajna $\mathbf{A}$ i vektor slobodnih članova $\mathbf{f}$ formiraju se na sledeći način:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \frac{\partial Z}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z}{\partial \mu_1} & \frac{\partial Z}{\partial \mu_2} \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 1 & -Y_1 & -X_1 \\ & \vdots & \\ 1 & -Y_n & -X_n \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -Z_1 \\ \vdots \\ -Z_n \end{bmatrix}$$

- Stohastički model posrednog izravnanja

  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

  Matrica težina $\mathbf{P}$ formira se na sledeći način:

  $\mathbf{P} = \mathbf{E}$, $\mathbf{E}$ – jedinična matrica (sva merenja su homogene tačnosti).

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

  $\mathbf{N\hat{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$

  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{PA}$

  $\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{Pf}$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

  $\mathbf{\hat{x}} = -\mathbf{Q}_{\mathbf{\hat{x}}} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{\hat{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$

  $\mathbf{\hat{V}} = \mathbf{A\hat{x}} + \mathbf{f}$

Analiza tačnosti

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}}}{n-u}},$$

gde je n broj merenja, a u broj nepoznatih parametara.

- Standardne devijacije nepoznatih parametara (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_\lambda = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\lambda\lambda}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_1} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_1\mu_1}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_2} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_2\mu_2}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\lambda\lambda} & Q_{\lambda\mu_1} & Q_{\lambda\mu_2} \\ Q_{\mu_1\lambda} & Q_{\mu_1\mu_1} & Q_{\mu_1\mu_2} \\ Q_{\mu_2\lambda} & Q_{\mu_2\mu_1} & Q_{\mu_2\mu_2} \end{bmatrix}$$

Primer 1

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 4 - Primer.xlsx.*

Građevinski blok potrebno je visinski urediti pre izgradnje industrijskih objekata, tako da se sa minimalnim radovima na korekciji prirodnog reljefa postigne efikasno odvodnjavanje terena gravitacijom.

X \ Y	0	10	20
0	100.300	100.005	100.003
10	100.167	100.000	100.600
20	100.170	100.160	100.154

- Matrica dizajna $\mathbf{A}$, vektor slobodnih članova $\mathbf{f}$ i matrica težina $\mathbf{P}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -20 \\ 1 & -10 & 0 \\ 1 & -10 & -10 \\ 1 & -10 & -20 \\ 1 & -20 & 0 \\ 1 & -20 & -10 \\ 1 & -20 & -20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -100.300 \\ -100.167 \\ -100.170 \\ -100.005 \\ -100.000 \\ -100.160 \\ -100.003 \\ -100.600 \\ -100.154 \end{bmatrix}$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 4 - Primeri.xlsx.*

Funkcionalni model posrednog izravnanja sa uslovima

- Jednačine popravaka i uslovna jednačina

$$V_i = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i - Z_i$$

$$\lambda - \mu_1 \cdot Y_j - \mu_2 \cdot X_j - Z_j = 0$$

Y_j, X_j - koordinate tačke j kojom je ravan uslovljena

- Funkcionalni model u matričnom obliku

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Matrica datumskih uslova $\mathbf{B}$ i vektor $\mathbf{w}$ formiraju se na sledeći način:

$$\mathbf{B} = [1 \quad -Y_j \quad -X_j], \qquad \mathbf{w} = [-Z_j]$$

- Ocena nepoznatih parametara

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} & (\mathbf{B}^-)^T \\ \mathbf{B}^- & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{f}$$

$\mathbf{k}$ – vektor Lagranžovih multiplikatora

Analiza tačnosti

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}}}{n-u}}$$

Gde je n broj merenja, a u broj nepoznatih parametara.

- Standardne devijacije nepoznatih parametara (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_\lambda = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\lambda\lambda}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_1} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_1\mu_1}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_2} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_2\mu_2}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\lambda\lambda} & Q_{\lambda\mu_1} & Q_{\lambda\mu_2} \\ Q_{\mu_1\lambda} & Q_{\mu_1\mu_1} & Q_{\mu_1\mu_2} \\ Q_{\mu_2\lambda} & Q_{\mu_2\mu_1} & Q_{\mu_2\mu_2} \end{bmatrix}$$

Primer 2

Građevinski blok potrebno je visinski urediti pre izgradnje industrijskih objekata, tako da se sa minimalnim radovima na korekciji prirodnog reljefa postigne efikasno odvodnjavanje terena gravitacijom.
Ravan je uslovljena tačkom 5 ($Y = 10, X = 10$).

X \ Y	0	10	20
0	100.300	100.005	100.003
10	100.167	100.000	100.600
20	100.170	100.160	100.154

- Matrica dizajna $\mathbf{A}$, vektor slobodnih članova $\mathbf{f}$, matrica težina $\mathbf{P}$, matrica $\mathbf{B}$ i vektor $\mathbf{w}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -20 \\ 1 & -10 & 0 \\ 1 & -10 & -10 \\ 1 & -10 & -20 \\ 1 & -20 & 0 \\ 1 & -20 & -10 \\ 1 & -20 & -20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -100.300 \\ -100.167 \\ -100.170 \\ -100.005 \\ -100.000 \\ -100.160 \\ -100.003 \\ -100.600 \\ -100.154 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [1 \quad -10 \quad -10]$$

$$\mathbf{w} = [-100.000]$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 4 - Primeri.xlsx.*

Funkcionalni model posrednog izravnanja sa uslovima

- Jednačine popravaka i uslovne jednačine

$V_i = \lambda - \mu_1 \cdot Y_i - \mu_2 \cdot X_i - Z_i$

$\lambda - \mu_1 \cdot Y_j - \mu_2 \cdot X_j - Z_j = 0$

$\lambda - \mu_1 \cdot Y_k - \mu_2 \cdot X_k - Z_k = 0$

Y_j, X_j, Y_k, X_k - koordinate tačaka j i k kojima je uslovljena ravan

- Funkcionalni model u matričnom obliku

$$\mathbf{V} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}$$
$$\mathbf{Bx} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Matrica datumskih uslova $\mathbf{B}$ i vektor $\mathbf{w}$ formiraju se na sledeći način:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -Y_j & -X_j \\ 1 & -Y_k & -X_k \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -Z_j \\ -Z_k \end{bmatrix}$$

- Ocena nepoznatih parametara

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} & (\mathbf{B}^-)^T \\ \mathbf{B}^- & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{PA}$

$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{Pf}$

$\mathbf{k}$ – vektor Lagranžovih multiplikatora

Analiza tačnosti

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \widehat{\mathbf{V}}}{n-u}}$$

Gde je n broj merenja, a u broj nepoznatih parametara.

- Standardne devijacije nepoznatih parametara (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_\lambda = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\lambda\lambda}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_1} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_1\mu_1}}$$

$$\hat{\sigma}_{\mu_2} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\mu_2\mu_2}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\lambda\lambda} & Q_{\lambda\mu_1} & Q_{\lambda\mu_2} \\ Q_{\mu_1\lambda} & Q_{\mu_1\mu_1} & Q_{\mu_1\mu_2} \\ Q_{\mu_2\lambda} & Q_{\mu_2\mu_1} & Q_{\mu_2\mu_2} \end{bmatrix}$$

Primer 3

Građevinski blok potrebno je visinski urediti pre izgradnje industrijskih objekata, tako da se sa minimalnim radovima na korekciji prirodnog reljefa postigne efikasno odvodnjavanje terena gravitacijom.
Ravan je uslovljena tačkama 2 ($Y = 0, X = 10$) i 6 ($Y = 10, X = 20$).

X \ Y	0	10	20
0	100.300	100.005	100.003
10	100.167	100.000	100.600
20	100.170	100.160	100.154

- Matrica dizajna $\mathbf{A}$, vektor slobodnih članova $\mathbf{f}$, matrica težina $\mathbf{P}$, matrica $\mathbf{B}$ i vektor $\mathbf{w}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -20 \\ 1 & -10 & 0 \\ 1 & -10 & -10 \\ 1 & -10 & -20 \\ 1 & -20 & 0 \\ 1 & -20 & -10 \\ 1 & -20 & -20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -100.300 \\ -100.167 \\ -100.170 \\ -100.005 \\ -100.000 \\ -100.160 \\ -100.003 \\ -100.600 \\ -100.154 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 1 & -10 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -100.167 \\ -100.160 \end{bmatrix}$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 4 - Primeri.xlsx.*

ZADATAK 4

- Sračunati elemente koji definišu ravan i parametre tačnosti (na način kao što je prethodno objašnjeno):
  a) Kada ravan nije uslovljena ni jednom tačkom;
  b) Kada ravan prolazi kroz jednu tačku;
  c) Kada ravan prolazi kroz dve tačke.
- Grafički interpretirati dobijene rezultate za sva tri rešenja (a), b) i c))

Primer grafičke interpretacije

Merene visine

X\Y	0	10	20
0	100.300	100.005	100.003
10	100.167	100.000	100.600
20	100.170	100.160	100.154

Popravke

X\Y	0	10	20
0	-0.176	0.139	0.161
10	-0.014	0.173	-0.407
20	0.012	0.043	0.069

Nove visine

X\Y	0	10	20
0	100.124	100.144	100.164
10	100.153	100.173	100.193
20	100.182	100.203	100.223