FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

INŽENJERSKA GEODEZIJA 2
- ZADATAK 5 -

NOVI SAD, 2026

Kontrola geometrije objekata

- Kontrola geometrije se vrši radi dokazivanja (ne)podudarnosti materijalizovanog objekta sa njegovim projektom.
- Geodetskim metodama merenja osmatrani objekat se diskretizuje i zamenjuje skupom tačaka čije se koordinate u procesu kontrole podudarnosti koriste za ocenu parametara modela geometrijske figure.
- Geometrijsku figuru čini skup tačaka povezanih uglovima i dužinama.

Prostorni odnosi geometrijskih elemenata

- Tačka ili skup tačaka može pripadati pravoj ili krivoj liniji, ravni ili površi.
- Prava ili ravan može biti horizontalna, vertikalna ili nagnuta.
- Dve prave ili dve ravni mogu biti paralelne, upravne ili mogu da se seku pod uglom.

Šta znači testiranje podudarnosti realizovane geometrije sa projektom?

Testiranje predstavlja statističku proveru jednakosti karakterističnih elemenata realizovane geometrije sa odgovarajućim elementima projektovane figure, pa tako razlikujemo test po:

- Obliku (upoređivanje uglovnih elemenata);
- Obliku i veličini (upoređivanje uglovnih i linearnih elemenata);
- Položaju (upoređivanje koordinata).

Kako testirati podudarnost?

- Za test podudarnosti potrebno je formirati r nezavisnih linearnih jednačina čime se stvara funkcionalna veza između elemenata figure (dužina i uglova) i izravnatih koordinata tačaka.
- Broj jednačina jednak je broju nezavisnih elemenata potrebnih i dovoljnih da bi figura bila jednoznačno određena.
- Nelinearne jednačine je potrebno linearizovati razvojem u Tejlorov red.

Broj potrebnih i dovoljnih nezavisnih elemenata

- Broj nezavisnih elemenata r koji su potrebni i dovoljni da bi figura koju čini m tačaka bila određena u k - dimenzionalnom koordinatnom sistemu prikazan je u narednoj tabeli.

Koordinatni sistem	Vrsta određenosti geometrijske figure		
	Po obliku	Po obliku i veličini	Po položaju
1D ($k = 1$)	$k \cdot m - 2 = m - 2$	$k \cdot m - 1 = m - 1$	$k \cdot m = m$
2D ($k = 2$)	$k \cdot m - 4 = 2m - 4$	$k \cdot m - 3 = 2m - 3$	$k \cdot m = 2m$
3D ($k = 3$)	$k \cdot m - 7 = 3m - 7$	$k \cdot m - 6 = 3m - 6$	$k \cdot m = 3m$

Opšti oblik linearnih hipoteza

- Hipoteze

  $H_0\colon \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w}$ protiv $H_a\colon \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{w}$

  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$ – vektor vrednosti m linearnih funkcija

  $\mathbf{w}$ – vektor poznatih vrednosti (konstanti)

  $\mathbf{d} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}$ – vektor odstupanja od hipoteze

  $\mathbf{Q_d} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{H}^T$, $\mathbf{K_d} = m_0^2\mathbf{Q_d}$

- Test statistika

  $$T = \frac{\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q_d^{-1}}\mathbf{d}}{k \cdot m_0^2} \sim F_{1-\alpha,k,f}\Big|_{H_0} \quad \text{ili} \quad T = \frac{\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q_d^{-1}}\mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,k,\infty}\Big|_{H_0},$$

  gde je $k = r(\mathbf{H})$ rang matrice $\mathbf{H}$.

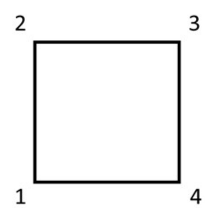
  $F_{1-\alpha,k,\infty}$ – kvantil Fišerove raspodele za nivo značajnosti α i brojeve stepeni slobode k i f (∞)

Testiranje hipoteze da je oblik kvadrat

- Hipoteze

  $H_0\colon M(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ protiv $H_a\colon M(\mathbf{d}) \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{1-2} - d_{2-3} \\ d_{2-3} - d_{3-4} \\ d_{3-4} - d_{4-1} \\ \nu_1^4 - \nu_1^2 - 90^\circ \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \leftarrow f_3 \\ \leftarrow f_4 \end{matrix}$$



- Formiranje matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ i matrice $\mathbf{H}$

  $\mathbf{A} = \mathbf{E}$

  Usvajamo $\sigma_0 = \sigma_Y$.

  $P_{Y_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_Y^2} = 1$, $P_{X_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_X^2}$

  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{P}$

  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_4} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_4} \\
\frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_4} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_4} \\
\frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_4} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_4} \\
\frac{\partial f_4}{\partial \hat{Y}_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \hat{Y}_2} & \frac{\partial f_4}{\partial \hat{X}_2} & \frac{\partial f_4}{\partial \hat{Y}_3} & \frac{\partial f_4}{\partial \hat{X}_3} & \frac{\partial f_4}{\partial \hat{Y}_4} & \frac{\partial f_4}{\partial \hat{X}_4}
\end{bmatrix}$$

Testiranje hipoteze da je oblik kvadrat

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} B_{12} & A_{12} & (B_{21}-B_{23}) & (A_{21}-A_{23}) & -B_{32} & -A_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} & A_{23} & (B_{32}-B_{34}) & (A_{32}-A_{34}) & -B_{43} & -A_{43} \\ -B_{14} & -A_{14} & 0 & 0 & B_{34} & A_{34} & (B_{43}-B_{41}) & (A_{43}-A_{41}) \\ (b_{14}-b_{12}) & (a_{14}-a_{12}) & -b_{21} & -a_{21} & 0 & 0 & b_{41} & a_{41} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q_d} = \mathbf{HQ_{\hat{x}}H}^T, k = r(\mathbf{H})$$

$$T = \frac{\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q_d}^{-1}\mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,k,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty}$ → **FINV($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{k}$,100000)**

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,k,\infty}$, nulta hipoteza H_0 se ne odbacuje, tj. obeležena figura je kvadrat. Sa druge strane, ako je $T \geq F_{1-\alpha,k,\infty}$, nulta hipoteza H_0 se odbacuje, tj. obeležena figura nije kvadrat.

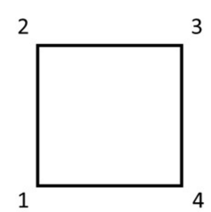
Napomene:

- Koeficijenti a_{ij}, b_{ij}, A_{ij}, B_{ij} formiraju se na isti način kao u matrici dizajna $\mathbf{A}$;
- Elemente vektora $\mathbf{d}$ treba izrazi u milimetrima i sekundama.

Primer 1

U narednoj tabeli date su koordinate tačaka koje reprezentuju kvadrat. Testirati hipotezu da li obeležena figura predstavlja kvadrat.

Br. tačke	Y[m]	X[m]
1	499.521	310.134
2	542.962	400.207
3	633.031	356.760
4	589.596	266.695



Standnardne devijacije koordinata tačaka iznose $\sigma_Y = 1.8$ mm i $\sigma_X = 2.0$ mm. Za nivo značajnosti α usvojiti vrednost 0.05.

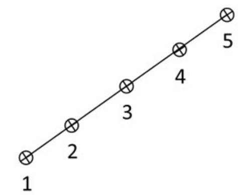
Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu ***Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 5 - Primeri.xlsx.***

Testiranje hipoteze da tačke pripadaju istoj liniji

- Hipoteze

  $H_0: M(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ protiv $H_a: M(\mathbf{d}) \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_2^3 \\ \mathrm{v}_2^3 - \mathrm{v}_3^4 \\ \mathrm{v}_3^4 - \mathrm{v}_4^5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \leftarrow f_3 \end{matrix}$$



- Formiranje matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ i matrice $\mathbf{H}$

  $\mathbf{A} = \mathbf{E}$

  Usvajamo $\sigma_d = \sigma_O$.

  $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_O^2} = 1, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}$

  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{E}$

  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{E}$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_4} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_4} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{Y}_5} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{X}_5} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_4} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_4} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{Y}_5} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{X}_5} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_4} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_4} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{Y}_5} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{X}_5} \end{bmatrix}$$

Testiranje hipoteze da tačke pripadaju istoj liniji

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} b_{12} & a_{12} & (b_{21} - b_{23}) & (a_{21} - a_{23}) & -b_{32} & -a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} & a_{23} & (b_{32} - b_{34}) & (a_{32} - a_{34}) & -b_{43} & -a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{34} & a_{34} & (b_{43} - b_{45}) & (a_{43} - a_{45}) & -b_{54} & -a_{54} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_\mathbf{d} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{H}^T, k = r(\mathbf{H})$$

$$T = \frac{\mathbf{d}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{d}^{-1}\mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,k,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty}$ → **FINV($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{k}$,100000)**

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,k,\infty}$, nulta hipoteza H_0 se ne odbacuje, tj. tačke pripadaju istoj liniji. Sa druge strane, ako je $T \geq F_{1-\alpha,k,\infty}$, nulta hipoteza H_0 se odbacuje, tj. tačke ne pripadaju istoj liniji.

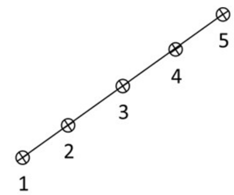
Napomene:

- Koeficijenti a_{ij}, b_{ij}, A_{ij}, B_{ij} formiraju se na isti način kao u matrici dizajna $\mathbf{A}$;
- Elemente vektora $\mathbf{d}$ treba izrazi u sekundama.

Primer 2

U narednoj tabeli date su koordinate tačaka koje reprezentuju pravu liniju. Testirati hipotezu da li tačke pripadaju istoj liniji.

Br. tačke	1	2	3	4	5
Apscisa [m]	0	20	40	60	80
Ordinata [m]	1.186	1.188	1.211	1.204	1.201



Standard merenja odstojanja iznosi $\sigma_O = 1.8\ \mathrm{mm}$. Za nivo značajnosti α usvojiti vrednost 0.05.

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu
Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 5 - Primeri.xlsx.

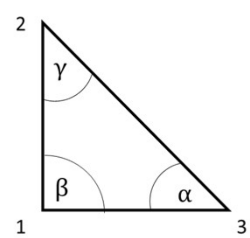
Testiranje hipoteze da je trougao pravougli

- Izravnanje po metodi posrednih merenja

Merene veličine: α, β i γ.

Funkcije veze:

$$\alpha = X,\ \beta = Y$$
$$\gamma = 180° - (X + Y)$$



Formiranje matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{P}$, i vektora slobodnih članova $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} X & Y \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial X} & \frac{\partial\alpha}{\partial Y} \\ \frac{\partial\beta}{\partial X} & \frac{\partial\beta}{\partial Y} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial X} & \frac{\partial\gamma}{\partial Y} \end{bmatrix}} \end{array} \qquad \sigma_0 = \sigma_u \qquad P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_u^2} = 1 \qquad \mathbf{P} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f} = \begin{array}{c} T - M \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \big(180° - (X + Y)\big) - \gamma \end{bmatrix} \end{array}$$

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

  $\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$

  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$

  $\mathbf{n} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{f}$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

  $\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$

  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$

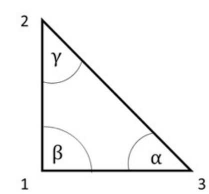
- *A posteriori* standardna devijacija

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{n-u}}$$

Testiranje hipoteze da je trougao pravougli

- Hipoteze

  $H_0: M(\mathbf{d}) = 0$ protiv $H_a: M(\mathbf{d}) \neq 0$ $\qquad \mathbf{d} = [\hat{\beta} - 90°] \leftarrow f$



- Test statistika

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \hat{X}} & \dfrac{\partial f}{\partial \hat{Y}} \end{bmatrix}, k = r(\mathbf{H})$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{H}^T$$

$$T = \frac{\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{-1}\mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha,k,\infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha,f,\infty}$ → **FINV(α, k,100000)**

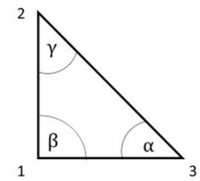
Ukoliko je $T < F_{1-\alpha,k,\infty}$, nulta hipoteza H_0 se ne odbacuje, tj. trougao jeste pravougli. Sa druge strane, ako je $T \geq F_{1-\alpha,k,\infty}$, nulta hipoteza H_0 se odbacuje, tj. trougao nije pravougli.

Napomena: Elemente vektora slobodnih članova $\mathbf{f}$ i razliku $\hat{\beta} - 90°$ izraziti u sekundama.

Primer 3

U narednoj tabeli dati su rezultati merenja uglova u trouglu. Testirati hipotezu da li je ovaj trougao pravougli.

Ugao	°	'	"
α	44	47	12
β	90	0	13
γ	45	12	52



Standard merenja uglova iznosi $\sigma_\alpha = 3''$. Za nivo značajnosti α usvojiti vrednost 0.05.

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu
Inženjerska geodezija 2 - Zadatak 5 - Primeri.xlsx.