

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA

RAČUN IZRAVNANJA
- VEŽBA 4 -

NOVI SAD, 2025.

Izravnanje po metodi posrednih merenja

- Gaus-Markovljev model izravnanja

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \quad - \text{funkcionalni model}$$

$$\mathbf{P}_l = \mathbf{Q}_l^{-1}, E(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad - \text{stohastički model}$$

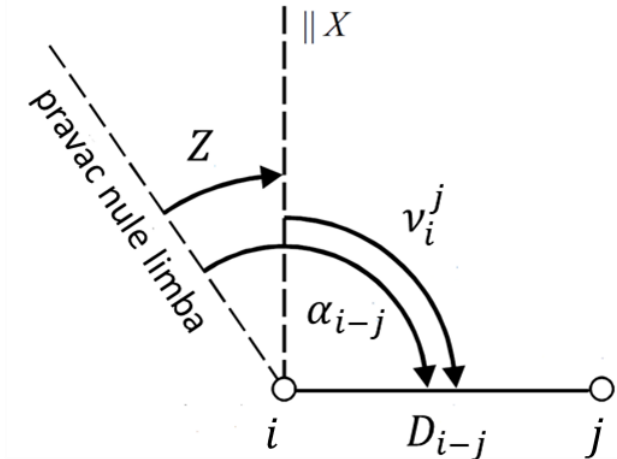
- Funkcionalnim modelom je definisana funkcionalna (matematička) veza između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.
- Stohastički model definiše određene pretpostavke u vezi sa merenjima.

Funkcionalni model

- Funkcije veze

$$\alpha_{i-j} + v_{\alpha_{i-j}} = \arctan\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right) + Z \quad - \text{ horizontalni pravci}$$

$$D_{i-j} + v_{D_{i-j}} = \sqrt{(Y_j - Y_i)^2 + (X_j - X_i)^2} \quad - \text{ horizontalne dužine}$$



- Funkcije veze linearizuju se razvojem u Tejlorov red u okolini približnih vrednosti nepoznatih parametara, nakon čega se dobijaju jednačine popravaka:

$$v_{\alpha_{i-j}} = a_{ij} \cdot dX_i + b_{ij} \cdot dY_i + a_{ji} \cdot dX_j + b_{ji} \cdot dY_j + dZ + f_{\alpha_{i-j}}$$

$$v_{D_{i-j}} = A_{ij} \cdot dX_i + B_{ij} \cdot dY_i + A_{ji} \cdot dX_j + B_{ji} \cdot dY_j + f_{D_{i-j}}$$

Funkcionalni model

- Slobodni članovi

$$f_{\alpha_{i-j}} = \alpha_{i-j}^0 - \alpha_{i-j}, \quad \alpha_{i-j}^0 = v_i^j + Z_0, \quad v_i^j = \arctan\left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{X_j^0 - X_i^0}\right)$$

$$f_{D_{i-j}} = D_{i-j}^0 - D_{i-j}, \quad D_{i-j}^0 = \sqrt{(Y_j^0 - Y_i^0)^2 + (X_j^0 - X_i^0)^2}$$

$Y_j^0, Y_i^0, X_j^0, X_i^0, Z_0$ - približne vrednosti nepoznatih parametara

- Koeficijenti

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha_{i-j}}{\partial X_i}\right)_0 = \frac{\rho'' \sin v_i^j}{D_{i-j}^0}, \quad b_{ij} = \left(\frac{\partial \alpha_{i-j}}{\partial Y_i}\right)_0 = -\frac{\rho'' \cos v_i^j}{D_{i-j}^0}, \quad \rho'' = 206265$$

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial D_{i-j}}{\partial X_i}\right)_0 = -\cos v_i^j, \quad B_{ij} = \left(\frac{\partial D_{i-j}}{\partial Y_i}\right)_0 = -\sin v_i^j$$

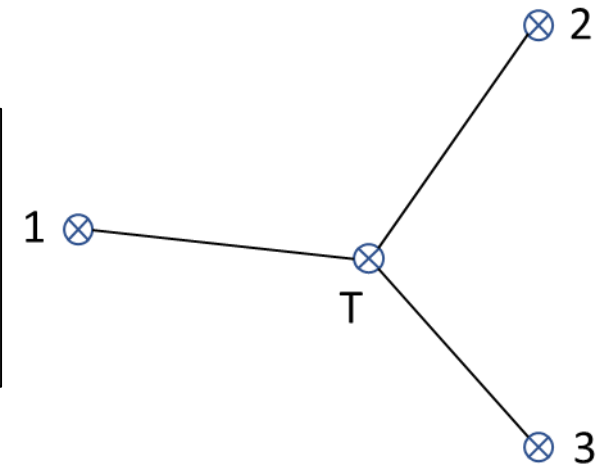
Funkcionalni model

• Primer 1 – dvodimenzionalna geodetska mreža

Tačka T(Y, X) određuje se od tačaka 1, 2 i 3 merenjem dužina i pravaca do istih. Standardi merenja su: 2"- za pravce i 3mm + 3mm/km - za dužine. Oceniti koordinate tražene tačke i sračunati elemente apsolutne elipse grešaka.

Date tačke: 1, 2 i 3

Nepoznata tačka: T



Jednačine popravaka:

$$v_{\alpha_{T-1}} = a_{T1} \cdot dX_T + b_{T1} \cdot dY_T + dZ + f_{\alpha_{T-1}}, \quad f_{\alpha_{T-1}} = (v_T^1 + Z_0) - \alpha_{T-1}$$

$$v_{\alpha_{T-2}} = a_{T2} \cdot dX_T + b_{T2} \cdot dY_T + dZ + f_{\alpha_{T-2}}, \quad f_{\alpha_{T-2}} = (v_T^2 + Z_0) - \alpha_{T-2}$$

$$v_{\alpha_{T-3}} = a_{T3} \cdot dX_T + b_{T3} \cdot dY_T + dZ + f_{\alpha_{T-3}}, \quad f_{\alpha_{T-3}} = (v_T^3 + Z_0) - \alpha_{T-3}$$

$$v_{D_{T-1}} = A_{T1} \cdot dX_T + B_{T1} \cdot dY_T + f_{D_{T-1}}, \quad f_{D_{T-1}} = D_{T-1}^0 - D_{T-1}$$

$$v_{D_{T-2}} = A_{T2} \cdot dX_T + B_{T2} \cdot dY_T + f_{D_{T-2}}, \quad f_{D_{T-2}} = D_{T-2}^0 - D_{T-2}$$

$$v_{D_{T-3}} = A_{T3} \cdot dX_T + B_{T3} \cdot dY_T + f_{D_{T-3}}, \quad f_{D_{T-3}} = D_{T-3}^0 - D_{T-3}$$

$$Z_{0,1} = \alpha_{T-1} - v_T^1$$

$$Z_{0,2} = \alpha_{T-2} - v_T^2$$

$$Z_{0,3} = \alpha_{T-3} - v_T^3$$

$$Z_0 = \frac{Z_{0,1} + Z_{0,2} + Z_{0,3}}{3}$$

Funkcionalni model

- **Primer 1 – dvodimenzionalna geodetska mreža**

Formiranje matrice dizajna \mathbf{A} i vektora slobodnih članova \mathbf{f} :

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} dX_T & dY_T & dZ \\ \begin{bmatrix} a_{T1} & b_{T1} & 1 \\ a_{T2} & b_{T2} & 1 \\ a_{T3} & b_{T3} & 1 \\ A_{T1} & B_{T1} & 0 \\ A_{T2} & B_{T2} & 0 \\ A_{T3} & B_{T3} & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \alpha_{T-1} \\ \alpha_{T-2} \\ \alpha_{T-3} \\ D_{T-1} \\ D_{T-2} \\ D_{T-3} \end{matrix} \end{matrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{\alpha_{T-1}} \\ f_{\alpha_{T-2}} \\ f_{\alpha_{T-3}} \\ f_{D_{T-1}} \\ f_{D_{T-2}} \\ f_{D_{T-3}} \end{bmatrix}$$

Napomene:

- Slobodna članove za horizontalne pravce izraziti u sekundama.
- Slobodne članove za dužine izraziti u milimetrima.
- Pri računanju koeficijenata a_{ij} i b_{ij} , dužine D_{i-j}^0 izraziti u milimetrima.

Stohastički model

• Primer 1 – dvodimenzionalna geodetska mreža

Formiranje matrice težina \mathbf{P} :

Težine merenja P_i predstavljaju stepen poverenja u rezultate merenja.

$$\sigma_{\alpha_{i-j}} = 2''$$

$$\sigma_{D_{T-1}} = 3 \text{ mm} + 3 \frac{\text{mm}}{\text{km}} \cdot D_{T-1}^0 [\text{km}]$$

$$\sigma_{D_{T-2}} = 3 \text{ mm} + 3 \frac{\text{mm}}{\text{km}} \cdot D_{T-2}^0 [\text{km}]$$

$$\sigma_{D_{T-3}} = 3 \text{ mm} + 3 \frac{\text{mm}}{\text{km}} \cdot D_{T-3}^0 [\text{km}]$$

Za σ_0 usvojiti vrednost 1!

$$P_{\alpha_{T-1}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\alpha_{T-1}}^2}, P_{D_{T-1}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{D_{T-1}}^2}$$

$$P_{\alpha_{T-2}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\alpha_{T-2}}^2}, P_{D_{T-2}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{D_{T-2}}^2}$$

$$P_{\alpha_{T-3}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\alpha_{T-3}}^2}, P_{D_{T-3}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{D_{T-3}}^2}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{\alpha_{T-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\alpha_{T-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\alpha_{T-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{D_{T-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{D_{T-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{D_{T-3}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{T-1} \\ \alpha_{T-2} \\ \alpha_{T-3} \\ D_{T-1} \\ D_{T-2} \\ D_{T-3} \end{bmatrix}$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Račun izravnjanja - Vežba 4.xlsx*.

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:

$$\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T \mathbf{P} \mathbf{f} + \mathbf{n}^T \hat{\mathbf{x}}$$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f} \quad f = n - u, \quad n - \text{broj merenja}, \quad u - \text{broj nepoznatih parametara}$$

Globlani test na grube greške

- Hipoteze

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ protiv } H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

pri čemu je $\sigma^2 = M(m_0^2)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha, f, \infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha, f, \infty} \rightarrow \text{FINV}(\alpha, f, 10000)$

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha, f, \infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha, f, \infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Data snooping test

- *Data snooping* test se primenjuje ukoliko je primenom globalnog testa utvrđeno da postoje grube greške u merenjima.

- Hipoteze

$$H_0: E(\delta_i) = 0 \quad \text{protiv} \quad H_0: E(\delta_i) \neq 0,$$

pri čemu je δ_i gruba greška kojom je opterećeno merenje l_i .

- Test statistika

$$w_i = \frac{|v_i|}{\sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i}}} \sim N(0,1),$$

gde je v_i popravka i -tog opažanja, σ_0 *a priori* standardna devijacija, $Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i}$ i -ti dijagonalni element kofaktorske matrice popravaka $\mathbf{Q}_{\hat{v}}$ i N standardizovana normalna raspodela.

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{A}^T$$

Data snooping test

- Ukoliko je $w_i \geq N_{1-\alpha/2}$, merenje l_i opterećeno je grubom greškom. Sa druge strane, ako je $w_i < N_{1-\alpha/2}$, merenje l_i nije opterećeno grubom greškom.

Excel: $N_{1-\alpha/2} \rightarrow \text{NORMINV}(1 - (\alpha/2), 0, 1)$

- Kada je više merenja opterećeno grubom greškom, merenje sa najvećom vrednošću test statistike w_i proglašava se grubom greškom i odbacuje iz merenja.
- Postupak izravnjanja se ciklično ponavlja sve dok se sva merenja sa grubim greškama ne identifikuju i odbace.

Definitivna kontrola izravnanja

Izravne koordinate:

$$\hat{Y}_i = Y_i^0 + dY_i$$

$$\hat{X}_i = X_i^0 + dX_i$$

$$\hat{Z} = Z_0 + dZ$$

Merene veličine iz izravnatih koordinata:

$$\hat{\alpha}_{i-j} = \hat{v}_i^j + \hat{Z}, \quad \hat{v}_i^j = \arctan\left(\frac{\hat{Y}_j - \hat{Y}_i}{\hat{X}_j - \hat{X}_i}\right)$$

$$\hat{D}_{i-j} = \sqrt{(\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2 + (\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2}$$

Kontrola izravnanja:

$$u_{\alpha_{i-j}} = \hat{\alpha}_{i-j} - \alpha_{i-j}$$

$$u_{D_{i-j}} = \hat{D}_{i-j} - D_{i-j}$$

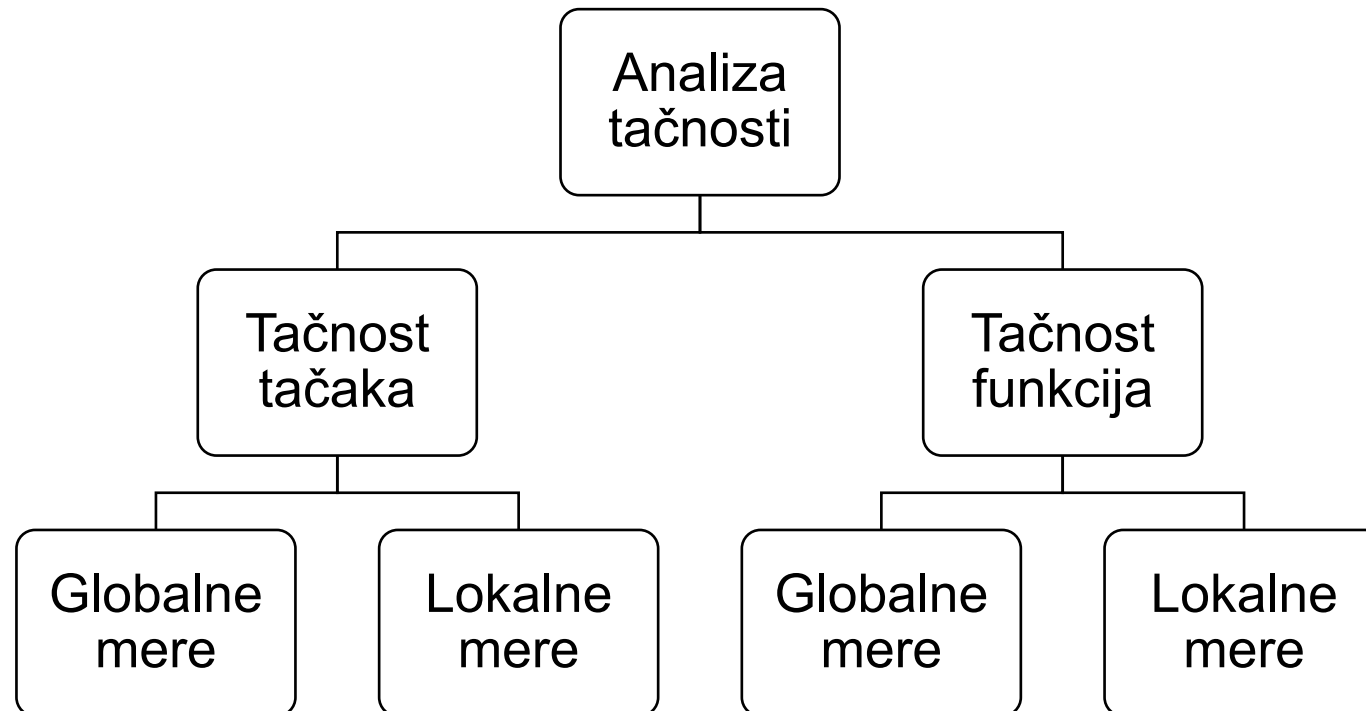
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\alpha_{i-j}} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{D_{i-j}} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Na ovaj način se kontrolišu sve moguće greške u postupku izravnanja.

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Ocena tačnosti može biti globalna ako se određuje jedna vrednost kao reprezent za ceo skup veličina u geodetskoj mreži ili lokalna ocena tačnosti ako se ona odnosi na pojedine veličine.



Analiza tačnosti geodetskih mreža

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

$$m_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f}},$$

pri čemu je $f = n - u$ broj stepeni slobode.

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{Y}_1 \hat{Y}_1} & Q_{\hat{Y}_1 \hat{X}_1} & \dots & \dots \\ Q_{\hat{X}_1 \hat{Y}_1} & Q_{\hat{X}_1 \hat{X}_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & Q_{\hat{Y}_m \hat{Y}_m} & Q_{\hat{Y}_m \hat{X}_m} \\ & & & Q_{\hat{X}_m \hat{Y}_m} & Q_{\hat{X}_m \hat{X}_m} \end{bmatrix}$$

- Standardne devijacije koordinata tačaka (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_{Y_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i}}, \quad \hat{\sigma}_{X_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i}},$$

pri čemu su $Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i}$, $Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i}$ dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$.

- Standardne devijacije položaja tačaka (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_{P_i} = \sqrt{\hat{\sigma}_{Y_i}^2 + \hat{\sigma}_{X_i}^2}$$

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- Elementi apsolutnih elipsi grešaka (lokalne mere tačnosti)

$$\lambda_{1,i} = \frac{1}{2} (Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} + Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i} + k), \quad \lambda_{2,i} = \frac{1}{2} (Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} + Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i} - k),$$

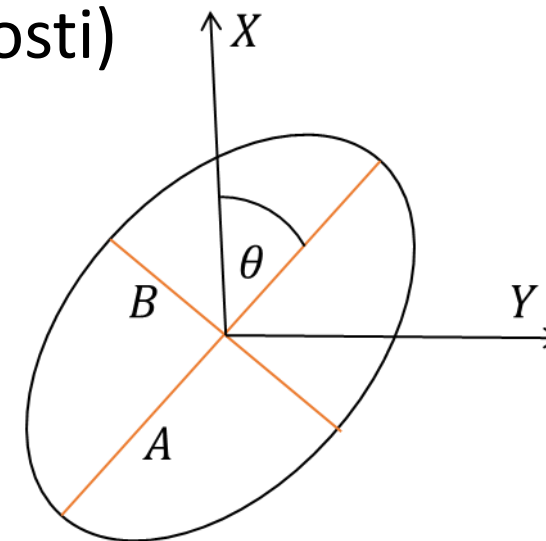
$$k = \sqrt{(Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} - Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i})^2 + 4Q_{\hat{X}_i\hat{Y}_i}^2}$$

$$A_i = m_0 \sqrt{\lambda_{1,i} \cdot \chi_{1-\alpha,f}^2}, \quad B_i = m_0 \sqrt{\lambda_{2,i} \cdot \chi_{1-\alpha,f}^2},$$

$\chi_{1-\alpha,f}^2$ - kvantil χ^2 raspodele za nivo značajnosti α i broj stepeni slobode f

Za α usvojiti vrednost 0.05, broj stepeni slobode f iznosi 2 jer kod 2D mreža tačke imaju dve koord.

$\chi_{0.95,2}^2 = 5.99$, za $\alpha = 0.05$ i $f = 2$.



Excel: $\chi_{1-\alpha,f}^2 \rightarrow \text{CHIINV}(\alpha, f)$

Analiza tačnosti geodetskih mreža

$$\theta_i = \frac{1}{2} \left(\arctan \left(\frac{2Q_{\hat{X}_i\hat{Y}_i}}{Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} - Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i}} \right) + KV \right)$$

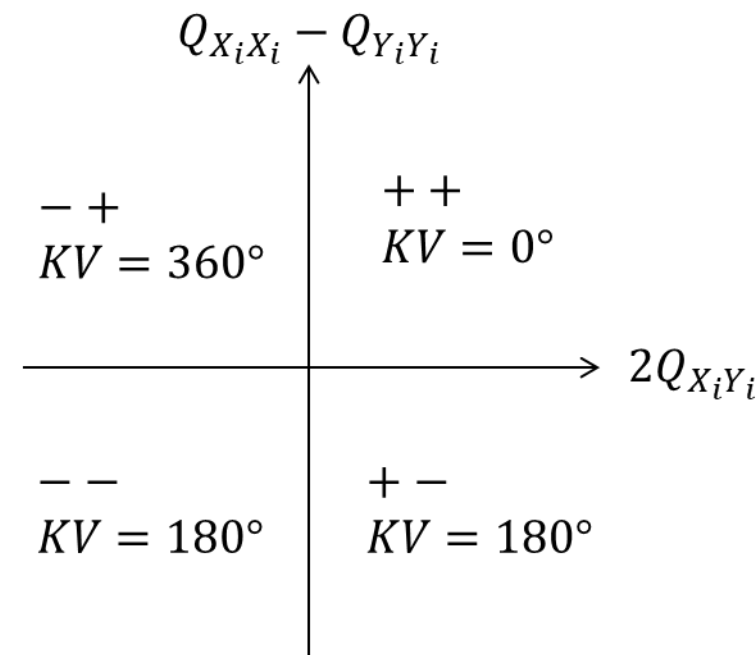
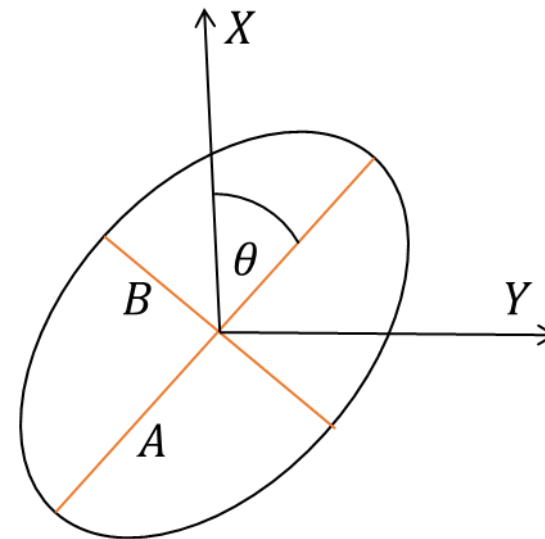
Primer:

$$2Q_{\hat{X}_i\hat{Y}_i} = -2$$

$$Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} - Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i} = -2$$

$$KV = 180^\circ$$

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\arctan \left(\frac{-2}{-2} \right) + KV \right) = \frac{1}{2} (45^\circ + 180^\circ)$$



Funkcionalni model

- Jednačine popravaka – visinske razlike (geometrijski nivelman)

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \Delta h_{i-j} + v_{\Delta h_{i-j}} \quad (1)$$

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \widehat{H}_j - \widehat{H}_i \quad (2)$$

Na osnovu izraza (1) i (2) može se napisati:

$$v_{\Delta h_{i-j}} = (\widehat{H}_j - \widehat{H}_i) - \Delta h_{i-j}, \quad \widehat{H}_j = H_j^0 + dH_j \quad \text{i} \quad \widehat{H}_i = H_i^0 + dH_i,$$

$$v_{\Delta h_{i-j}} = H_j^0 + dH_j - H_i^0 - dH_i - \Delta h_{i-j},$$

a onda:

$$v_{\Delta h_{i-j}} = dH_j - dH_i + f_{\Delta h_{i-j}}, \quad f_{\Delta h_{i-j}} = (H_j^0 - H_i^0) - \Delta h_{i-j}.$$

Funkcionalni model

- **Primer 2 – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Na osnovu prikupljenih merenja izravnati slobodnu geodetsku mrežu geometrijskog nivelmana po metodi posrednih merenja. Za kotu repera 1 usvojiti vrednost 100 m.

Približne visine repera:

Usvajamo $H_1 = 100$ m, reper 1 smatra se datim.

$$H_2^0 = H_1 + \Delta h_{1-2}, \quad H_3^0 = H_1 + \Delta h_{1-3}, \quad H_4^0 = H_1 - \Delta h_{4-1}$$

Jednačine popravaka:

$$v_{\Delta h_{1-2}} = dH_2 + f_{\Delta h_{1-2}}, \quad f_{\Delta h_{1-2}} = (H_2^0 - H_1) - \Delta h_{1-2}$$

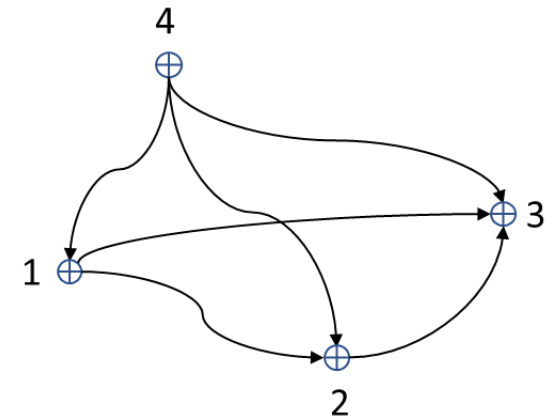
$$v_{\Delta h_{2-3}} = dH_3 - dH_2 + f_{\Delta h_{2-3}}, \quad f_{\Delta h_{2-3}} = (H_3^0 - H_2^0) - \Delta h_{2-3}$$

$$v_{\Delta h_{1-3}} = dH_3 + f_{\Delta h_{1-3}}, \quad f_{\Delta h_{1-3}} = (H_3^0 - H_1) - \Delta h_{1-3}$$

$$v_{\Delta h_{4-1}} = -dH_4 + f_{\Delta h_{4-1}}, \quad f_{\Delta h_{4-1}} = (H_1 - H_4^0) - \Delta h_{4-1}$$

$$v_{\Delta h_{4-2}} = dH_2 - dH_4 + f_{\Delta h_{4-2}}, \quad f_{\Delta h_{4-2}} = (H_2^0 - H_4^0) - \Delta h_{4-2}$$

$$v_{\Delta h_{4-3}} = dH_3 - dH_4 + f_{\Delta h_{4-3}}, \quad f_{\Delta h_{4-3}} = (H_3^0 - H_4^0) - \Delta h_{4-3}$$



Funkcionalni model

- **Primer 2 – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Formiranje matrice dizajna \mathbf{A} i vektora slobodnih članova \mathbf{f} :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{ccc|c} & dH_2 & dH_3 & dH_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & & & \begin{array}{l} v_{\Delta h_{1-2}} \\ v_{\Delta h_{2-3}} \\ v_{\Delta h_{1-3}} \\ v_{\Delta h_{4-1}} \\ v_{\Delta h_{4-2}} \\ v_{\Delta h_{4-3}} \end{array} \end{array} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{\Delta h_{1-2}} \\ f_{\Delta h_{2-3}} \\ f_{\Delta h_{1-3}} \\ f_{\Delta h_{4-1}} \\ f_{\Delta h_{4-2}} \\ f_{\Delta h_{4-3}} \end{bmatrix}$$

Napomena:

- Slobodna članove $f_{\Delta h_{i-j}}$ izraziti u milimetrima.

Stohastički model

- **Primer 2 – jednodimenzionalna geodetska mreža**

Formiranje matrice težina:

$$P_{\Delta h_{i-j}} = \frac{1}{n_{i-j}},$$

n_{i-j} – broj stanica.

$$\begin{aligned} P_{\Delta h_{1-2}} &= \frac{1}{n_{1-2}} & P_{\Delta h_{4-1}} &= \frac{1}{n_{4-1}} \\ P_{\Delta h_{2-3}} &= \frac{1}{n_{2-3}} & P_{\Delta h_{4-2}} &= \frac{1}{n_{4-2}} \\ P_{\Delta h_{1-3}} &= \frac{1}{n_{1-3}} & P_{\Delta h_{4-3}} &= \frac{1}{n_{4-3}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{\Delta h_{1-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\Delta h_{2-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\Delta h_{1-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\Delta h_{4-3}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_{1-2} \\ \Delta h_{2-3} \\ \Delta h_{1-3} \\ \Delta h_{4-1} \\ \Delta h_{4-2} \\ \Delta h_{4-3} \end{bmatrix}$$

Kompletno rešenje zadatka dostupno je u fajlu *Račun izravnjanja - Vežba 4.xlsx*.

Primena metoda najmanjih kvadrata (MNK)

- Sistem normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

- Ocena nepoznatih parametara i popravaka merenih veličina

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

Kontrola računanja:

$$\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{f}^T \mathbf{P} \mathbf{f} + \mathbf{n}^T \hat{\mathbf{x}}$$

- Ocena disperzionog koeficijenta

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f} \quad f = n - u, \quad n - \text{broj merenja}, \quad u - \text{broj nepoznatih parametara}$$

Globlani test na grube greške

- Hipoteze

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ protiv } H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

pri čemu je $\sigma^2 = M(m_0^2)$, a M operator matematičkog očekivanja.

- Test statistika

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha, f, \infty}$$

Excel: $F_{1-\alpha, f, \infty} \rightarrow \text{FINV}(\alpha, f, 10000)$

Ukoliko je $T < F_{1-\alpha, f, \infty}$, nulta hipoteza se ne odbacuje, tj. nema grubih grešaka.

Ukoliko je $T \geq F_{1-\alpha, f, \infty}$, nulta hipoteza se odbacuje, pa konstatujemo da su u merenjima prisutne grube greške.

Definitivna kontrola izravnanja

Izravnote kote repera:

$$\widehat{H}_i = H_i^0 + dH_i$$

Merene veličine iz izravnatih kota repera:

$$\widehat{\Delta h}_{i-j} = \widehat{H}_j - \widehat{H}_i$$

Kontrola izravnanja:

$$u_{\Delta h_{i-j}} = \widehat{\Delta h}_{i-j} - \Delta h_{i-j}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\Delta h_{i-j}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} - \widehat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$$

Na ovaj način se kontrolišu sve moguće greške u postupku izravnanja.

Analiza tačnosti geodetskih mreža

- *A posteriori* standardna devijacija (globalna mera tačnosti)

$$m_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f}},$$

pri čemu je $f = n - u$ broj stepeni slobode.

- Standardne devijacije visina repera (lokalne mere tačnosti)

$$\hat{\sigma}_{H_i} = m_0 \sqrt{Q_{\hat{H}_i}}$$

σ_0 - *a priori* standardna devijacija

$Q_{\hat{H}_i}$ - dijagonalni elementi kofaktorske matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{H}_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & Q_{\hat{H}_m} \end{bmatrix}$$